

Проект по математике ученицы 8А класса ГБОУ
Школы №268 Мордань Дарьи

Тема "Теорема Пифагора и способы её
доказательства"

*«Геометрия владеет
многими сокровищами,
одно из них – это
теорема Пифагора»*

Иоганн Кеплер



Пифагор - древнегреческий
ученый VI в. до н. э.

Санкт-Петербург

2020 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Актуальность теоремы
2. Цель и задачи
3. Введение
4. Основная часть
5. Заключение
6. Вывод

Актуальность теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора в геометрии важна не меньше, чем таблица умножения, которая так же носит имя этого учёного, в арифметике. Решение многих геометрических задач (как в планиметрии, так и в стереометрии), сводится к рассмотрению прямоугольных треугольников и применению этой замечательной теоремы. Так же большинство задач по нахождению сторон прямоугольных треугольников сводится к использованию этой теоремы.

Цель работы

- Изучение истории появления и развития теоремы Пифагора.
- Изучение исторических сведений по использованию теоремы Пифагора.
- Рассмотрение различных видов доказательств теоремы Пифагора.

Задачи:

1. Собрать материал о Пифагоре Самосском.
2. Узнать интересный факт о теореме Пифагора.
3. Собрать материал по различным видам доказательств теоремы Пифагора.
4. Проанализировать и обработать собранную информацию.
5. Оформить материал.

Введение.

«В математике есть своя красота как в живописи и поэзии».

Н.Е.Жуковский

Теорема Пифагора!

Без преувеличения можно сказать, что это самая известная теорема геометрии, ибо о ней знает подавляющее большинство населения планеты, хотя доказать ее способна лишь очень незначительная его часть.

В чем же причина такой популярности «пифагоровых штанов»?

Знатоки утверждают, что причин здесь три:

- а) красота,
- б) простота,
- в) значимость.

Основная часть

Биография Пифагора

Историю жизни Пифагора трудно отделить от легенд, представляющих его в качестве совершенного мудреца и великого учёного, посвящённого во все таинства [греков](#) и [варваров](#). Ещё [Геродот](#) называл его «величайшим эллинским мудрецом»^[3]. Самые ранние известные источники об учении Пифагора появились лишь 200 лет спустя после его смерти. Сам Пифагор не оставил сочинений, и все сведения о нём и его учении основываются на трудах его последователей, не всегда беспристрастных.

По словам античных авторов, Пифагор встретился чуть ли не со всеми известными мудрецами той эпохи, греками, персами, халдеями, египтянами, впитал в себя всё накопленное человечеством знание.

В юном возрасте Пифагор отправился в [Египет](#), чтобы набраться мудрости и тайных знаний у [египетских жрецов](#). Диоген и Порфирий пишут, что самосский тиран [Поликрат](#) снабдил Пифагора рекомендательным письмом к [фараону Амасису](#), благодаря чему он был допущен к обучению и посвящён не только в египетские достижения медицины и математики, но и в таинства, запретные для прочих чужеземцев.

[Ямвлих](#) пишет, что Пифагор в 18-летнем возрасте покинул родной остров и, объехав мудрецов в разных краях света, добрался до Египта, где пробыл 22 года, пока его не увёл в [Вавилон](#) в числе пленников персидский царь [Камбис](#), завоевавший Египет в [525 до н. э.](#) В Вавилоне Пифагор пробыл ещё 12 лет, общаясь с магами, пока наконец не смог вернуться на Самос в 56-летнем возрасте, где соотечественники признали его мудрым человеком.

История теоремы Пифагора.

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связана с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора, а в Египте это соотношение использовалось для построения прямого угла еще пять тысяч лет назад. Возможно, что тогда еще не знали ее доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашел доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принес в жертву богам быка, по другим свидетельствам - даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более пятисот, в том числе: геометрических, алгебраических, механических и прочих. Благодаря такому количеству доказательств, теорема Пифагора попала в Книгу рекордов Гиннеса, как теорема с наибольшим количеством доказательств.

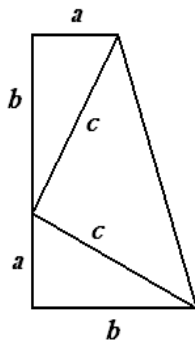
Во времена Пифагора теорема звучала так:

«Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»

«Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».

Доказательства

1. Доказательство Дж. Гардфилда (1882 г.)



Расположим два равных прямоугольных треугольника так, чтобы катет одного из них был продолжением другого. Площадь рассматриваемой трапеции находится как произведение полусуммы оснований на высоту

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$$

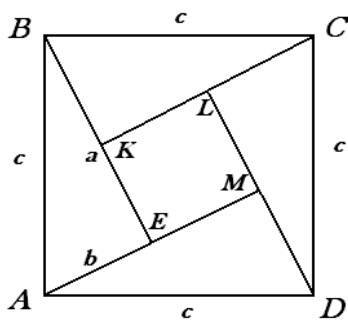
С другой стороны, площадь трапеции равна сумме площадей полученных треугольников:

$$S = \frac{ab}{2} \cdot 2 + \frac{c^2}{2}$$

Приравняв данные выражения, получаем:

$$\frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \quad \text{или} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

2. Старейшее доказательство (содержится в одном из произведений Бхаскары).



Пусть ABCD квадрат, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника ABE ($AB = c$, $BE = a$, $AE = b$);

Пусть $CK \perp BE = a$, $DL \perp CK$, $AM \perp DL \Rightarrow$

$$\triangle ABE = \triangle BCK = \triangle CDL = \triangle AMD,$$

значит $KL = LM = ME = EK = a-b$.

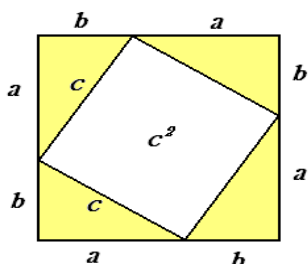
$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (a-b)^2$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$

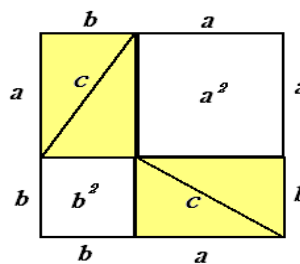
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

3. Доказательство древних индусов

Квадрат со стороной $(a+b)$, можно разбить на части либо как на рисунке а), либо как на рисунке б). Ясно, что части 1,2,3,4 на обоих рисунках одинаковы. А если от равных (площадей) отнять равные, то и останутся равные, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$.



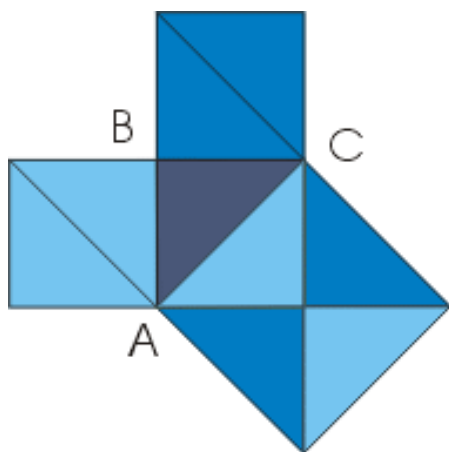
\equiv



Впрочем, древние индусы, которым принадлежит это рассуждение, обычно не записывали его, а сопровождали лишь одним словом:

“Смотри!”

4. Доказательство простейшее



Это доказательство получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема.

В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы.

Например, для треугольника ABC: квадрат, построенный на гипотенузе AC, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах, - по два. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы Пифагора через косинус угла:

Пусть ABC - данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведем высоту CD из вершины прямого угла C. По определению косинуса угла (Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе) $\cos A = AD/AC = AC/AB$. Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$. Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$. Складывая полученные равенства, замечая, что $AD + DB = AB$, получим: $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$. Теорема доказана.

6. Векторное доказательство теоремы:

Пусть ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C, построенный на векторах. Тогда справедливо векторное равенство: $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$ откуда имеем $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ возводя обе части в квадрат, получим $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Так как \mathbf{a} перпендикулярно \mathbf{b} , то $ab = 0$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$ или $c^2 = a^2 + b^2$. Теорема Пифагора снова доказана. Если треугольник ABC - произвольный, то та же формула дает теорему косинусов, обобщающую теорему Пифагора.

7. Доказательство Хоукинса:

Приведем еще одно доказательство, которое имеет вычислительный характер, однако сильно отличается от всех предыдущих. Оно опубликовано англичанином Хоукинсом в 1909 году; было ли оно известно до этого - трудно сказать.

Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на 90° так, чтобы он занял положение A'CB'. Продолжим гипотенузу A'B' за точку A' до пересечения с линией AB в точке D. Отрезок B'D будет высотой треугольника B'AB. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник A'AB'B. Его можно разложить на два равнобедренных треугольника САА' и СВВ' (или на два треугольника A'B'A и A'B'B).

$$SCAA' = b^2/2$$

$$SCBB' = a^2/2$$

$$SA'AB'B = (a^2 + b^2)/2$$

Треугольники $A'B'A$ и $A'B'B$ имеют общее основание c и высоты DA и DB , поэтому:
 $SA'AB'B = c \cdot DA/2 + c \cdot DB/2 = c(DA+DB)/2 = c^2/2$

Сравнивая два полученных выражения для площади, получим: $a^2 + b^2 = c^2$ Теорема доказана.

8. Доказательство Евклида

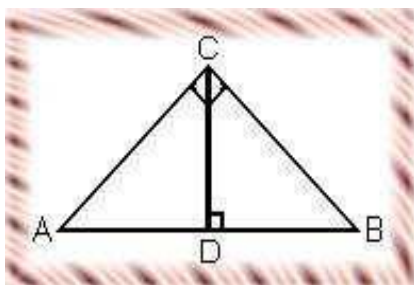
В течение двух тысячелетий наиболее распространенным было доказательство теоремы Пифагора, придуманное Евклидом. Оно помещено в его знаменитой книге «Начала».

Евклид опускал высоту $ВН$ из вершины прямого угла на гипотенузу и доказывал, что её продолжение делит достроенный на гипотенузе квадрат на два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих квадратов, построенных на катетах.

Чертёж, применяемый при доказательстве этой теоремы, в шутку называют «пифагоровы штаны». В течение долгого времени он считался одним из символов математической науки.

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его *Dons asinorum* - ослиный мост, или *elefuga* - бегство "убогих", так как некоторые "убогие" ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому "ослами", были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также "ветряной мельницей", составляли стихи вроде "Пифагоровы штаны на все стороны равны", рисовали карикатуры.

9. Алгебраическое доказательство



Дано: ABC -прямоугольный треугольник

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Доказательство:

1) Проведем высоту CD из вершины прямого угла C .
2) По определению косинуса угла $\cos A = AD/AC = AC/AB$, отсюда следует $AB \cdot AD = AC^2$.

3) Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$, значит

$$AB \cdot BD = BC^2.$$

4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Когда говорят о теореме Пифагора, сразу вспоминается одно понятие - египетский треугольник. Египетский треугольник - это прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Он получил такое название. оттого что был известен и широко применялся еще древними египтянами. Они с помощью такого треугольника строили прямые углы на местности, что имело для них огромное значение, так как каждый год разливы Нила

размывали границы между полями, и приходилось заново размечать их. Это делалось очень просто: на веревке узлами отмечалось 12 равных отрезков, а потом из этой веревки складывали треугольник, и угол, оказавшийся напротив стороны 5, являлся прямым.

Заключение

Практическое применение

Практическое значение теоремы Пифагора и обратной ему теоремы заключается в том, что с их помощью можно найти длины отрезков, не измеряя самих отрезков. Это как бы открывает путь от прямой к плоскости, от плоскости к объемному пространству и дальше. Именно по этой причине теорема Пифагора так важна для человечества, которое стремится открывать все больше измерений и создавать технологии в этих измерениях.

Но не надо думать, что теорема Пифагора больше не имеет других значений. Из того, что я уже сказала, надо сделать вывод, что все эти технологии используются также и в других отраслях.

Вывод

Теорема Пифагора - это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии. Теорема Пифагора была известна около 4000 лет назад, люди ещё находят новые способы её доказательства. Так что может быть и вы откроете ещё одно. Надо только захотеть