МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ  
 «КРАСНОДАРСКИЙ КОЛЛЕДЖ ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ОУДп.10 «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»

для студентов 1 курса

«Решение логарифмических и иррациональных уравнений и неравенств».

2020 г.

РАССМОТРЕНО

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по УМР

Е. А. Тупчиева

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_\_г.

УМО математики

протокол № \_\_\_

от «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_\_г.

Председатель

М.В. Малышевская

Составитель: Гончарова С.П.,

преподаватель ГБПОУ КК ККЭП \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись

Рецензент: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись

ФИО, место работы,

квалификация по диплому

Методическое пособие рекомендовано для студентов 1-х курсов, специальностей:

11.02.01 Радиоаппаратостроение

11.02.10 Радиосвязь, радиовещание и телевидение

В методическом пособии, составленном в соответствии с календарно-тематическим планом аудиторных занятий по дисциплине ОУДп.10 «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия» представлены способы выполнения практических заданий, перечень заданий для самостоятельного выполнения, основной теоретический материал, необходимый для их выполнения. Пособие может быть рекомендовано для использования при проведении аудиторных занятий, для самостоятельной подготовки студентов, для текущего контроля знаний. Рекомендовано к использованию в учебном процессе.

СОДЕРЖАНИЕ

[Пояснительная записка 4](#_Toc44329147)

[1. Иррациональные уравнения и неравенства. 5](#_Toc44329148)

[2. Логарифмические уравнения и неравенства. 12](#_Toc44329149)

[3. Задания для самостоятельного решения. 17](#_Toc44329150)

[Список, используемой литературы. 19](#_Toc44329151)

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель изучения дисциплины ОУДп.10 «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия»

* **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления;
* **овладение математическими знаниями и умениями,** необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественно - научных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
* **воспитание** средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Ведущей дидактической целью методического пособия является формирование практических умений решать логарифмические и иррациональные уравнения и неравенства.

В соответствии с ведущей дидактической целью содержанием методического пособия является:

* повторение теоретического материала;
* выполнение тренировочных упражнений.

# 1. Иррациональные уравнения и неравенства.

***Определение****. Уравнение или неравенство называется иррациональным, если оно содержит переменную под знаком корня.*

Например, уравнение и неравенство – иррациональные.

В иррациональных уравнениях и неравенствах все корни понимаются в смысле арифметического значения. Поэтому, если показатель корня чётное число, то подкоренное выражение и значение корня должны быть неотрицательными; если же показатель корня нечётное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом и знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения. Например, иррациональное уравнение не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна при всех допустимых значениях *x*.

Методы решения иррациональных уравнений основаны на возможности замены их рациональными уравнениями (путём различных преобразований), либо равносильными исходным, либо являющимися следствиями исходных.

Рассмотрим некоторые простейшие методы решения иррациональных уравнений.

1. ***Сведение иррациональных уравнений к рациональным путём возведения обоих частей в степень.***

Этот метод заключается в том, чтообе частиуравнения после соответствующих преобразований возводятся в одну и ту же степень. При этом корни исходного уравнения не теряются, но при возведении обеих частей уравнения в чётную степень могут появиться посторонние корни, поэтому проверка необходима.

Пример 1. Решить уравнение

.

. Возведём обе части уравнения в квадрат:

.

Приведя подобные члены и сократив обе части полученного уравнения на 2, получим уравнение

,

являющееся следствием исходного. Снова возведём обе части полученного уравнения в квадрат. Получим уравнение

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов приводится к виду

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни Проверка показывает, что оба решения удовлетворяют исходному уравнению.

Пример 2. Решить уравнение

Решение. Возведём обе части данного уравнения в квадрат:

Подставив число в исходное уравнение, замечаем, что оно не удовлетворяет ему и, следовательно, данное уравнение не имеет решений.

1. ***Уединение радикалов.***

При решении иррациональных уравнений, содержащих два радикала в одной части, довольно часто применяется приём, когда один из радикалов переносится в другую часть. Такой приём называется методом *уединения радикалов.*

Пример 3. Решить уравнение

Решение. Уединив первый радикал, получим уравнение

Возведя обе части в квадрат, получим

.

Возведя теперь обе части полученного уравнения в квадрат, будем иметь

Это уравнение является следствием исходного иррационального уравнения. Его решениями будут Первый корень удовлетворяет исходному уравнению, а второй не удовлетворяет. Следовательно, решением данного иррационального уравнения будет *x* = 2.

Пример 4. Решить уравнение

Решение. Если попробовать уединить корень, то после возведения в квадрат получится уравнение четвёртой степени. Поэтому мы решим это уравнение иначе. Введём обозначение *y=*. Данное уравнение можно записать в виде

Решая это квадратное уравнение, получим корни Таким образом, решение данного уравнения свелось к решению уравнения

(уравнение не имеет решений, так как корень понимается в смысле арифметического значения). Возведя обе части, полученного уравнения в квадрат, а затем решив его, получим корни: Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Для иррациональных неравенств, также как и для иррациональных уравнений, рассматриваются л ишь арифметические значения корня, т.е. если показатель корня - чётное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательным, равно как и значение корня. Кроме этого, неравенство не равносильно неравенству . Ведь только для положительных *a*и*b* из *a*<*b* заведомо вытекает , а из следует *a*<*b*.

Пример 5. Решить неравенство

Решение. Из того, что , следует .

Кроме того, корень принимает лишь неотрицательное значение, поэтому . Следовательно переменная должна удовлетворять неравенствам . Пересечение множеств, определяемых этими условиями, есть промежуток . В этой области обе части неравенства принимают положительные значения, и потому оно равносильно неравенствам

Из второго неравенства получаем . Следовательно, решением служит множество действительных чисел, удовлетворяющее одновременно двум условиям: .

Пример 6. Решить неравенство

Решение. Данное неравенство задано в области, определяемой ограничениями Их можно заменить одним неравенством . В области обе части данного неравенства положительны, и потому оно равносильно неравенству Таким образом исходное неравенство равносильно системе неравенств

Данная система неравенств равносильна исходному неравенству. Решая эту систему, находим, что

Решите иррациональные уравнения:

. Возведём обе части уравнения в квадрат:

2.

Приведя подобные члены, получим уравнение

,

являющееся следствием исходного. Снова возведём обе части полученного уравнения в квадрат. Получим уравнение

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов приводится к виду

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни Проверка показывает, что . Ответ: *x=2.*

. Возведём обе части уравнения в квадрат:

2.

Приведя подобные члены, получим уравнение

,

являющееся следствием исходного. Снова возведём обе части полученного уравнения в квадрат. Получим уравнение

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов приводится к виду

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни Проверка показывает, что . Ответ: *x=2.*

. Возведём обе части уравнения в квадрат:

.

Приведя подобные члены, получим уравнение

являющееся следствием исходного. Снова возведём обе части полученного уравнения в квадрат. Получим уравнение

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов приводится к виду

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корень Проверка показывает, что . Ответ: решений нет*.*

Решите иррациональные неравенства:

Решение. Из того, что , следует .

Кроме того, корень принимает лишь неотрицательное значение, поэтому . Следовательно переменная должна удовлетворять неравенствам . Пересечение множеств, определяемых этими условиями, есть промежуток . В этой области обе части неравенства принимают положительные значения, и потому оно равносильно неравенствам

Из второго неравенства получаем . Следовательно, решением служит множество действительных чисел, удовлетворяющее одновременно двум условиям:.

Решение. Из того, что , следует .

Пересечение множеств, определяемых этими условиями, есть интервал . В этой области обе части неравенства принимают положительные значения, и потому оно равносильно неравенствам

Из второго неравенства получаем . Следовательно, решением служит множество действительных чисел, удовлетворяющее условию :.

3.

Решение. Из того, что , следует, что переменная должна удовлетворять неравенствам . Пересечение множеств, определяемых этими условиями, есть промежутки . В этой области обе части неравенства принимают положительные значения, и потому оно равносильно неравенствам

Из второго неравенства получаем . Следовательно, решением служит множество действительных чисел, удовлетворяющее условию .

4.

Решение. Из того, что , следует, что переменная должна удовлетворять неравенствам . Пересечение множеств, определяемых этими условиями, есть промежуток . В этой области обе части неравенства принимают положительные значения, и потому оно равносильно неравенствам

Из второго неравенства получаем, что решений нет. Следовательно, решением служит множество действительных чисел, удовлетворяющее условию .

# 2. Логарифмические уравнения и неравенства.

***Логарифмическим уравнением*** называют уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма. Решить логарифмическое уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Рассмотрим способы решения логарифмических уравнений. В описанных ниже способах решения логарифмических уравнений применяются преобразования, которые не приводят к потере корней, а могут лишь привести к появлению посторонних корней. Поэтому проверка каждого из полученных корней обязательна.

*Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.*

Пример 1. Решить уравнение

Решение. По определению логарифма имеем:

Проверка:

Ответ: 4.

Пример 2. Решить уравнение

Решение. По определению логарифма имеем:

Проверка: 1) Значение не может быть корнем данного уравнения, так как основание логарифма не должно равняться 1.

2)

Ответ: 2.

Пример 3.

Решение. Применяя последовательно определение логарифма, получим

Проверка:

Ответ: 3.

*Метод потенцирования.*

Пример 4. Решить уравнение

Решение. Из равенства логарифмов следует:

Проверка: 1) Число -3 корнем данного уравнения быть не может, так как логарифмы отрицательных чисел не существуют.

2)

Ответ: 2

Пример 5. Решить уравнение

Решение. Потенцируя данное равенство, получим:

Проверка: 1)

2) не существует.

Ответ: -1.

Пример 6. Решить уравнение

Решение. ,

Проверка: 1)

2)

Ответ: уравнение решений не имеет.

*Приведение логарифмического уравнения к квадратному.*

Пример 7. Решить уравнение

Решение. Обозначим через *y.* Данное уравнение принимает вид:

Проверка: 1)

2)

Ответ: 0,001; 10.

*Уравнения, решаемые привидением логарифмов к одному и тому же основанию.*

Пример 8. Решить уравнение

Решение.

Проверка.

Ответ: 16.

Пример 9.

Решение.

*Уравнения, решаемые логарифмированием его обоих частей.*

Пример 10. Решить уравнение

Решение. Логарифмируя обе части уравнения

Заменим Уравнение принимает вид:

Проверка:

1)

2)

Ответ: 10; 0,001.

*Графическое решение логарифмических уравнений.*

Пример 11. Решить уравнение

Решение. В одной и той же системе координат строим графики функций

Y

3

2 X

Абсцисса точки пересечения графиков функций Решение. В одной и той же системе координат строим графики функций равна примерно 2. Нетрудно проверить , что это точный корень данного уравнения.

***Логарифмическое неравенство*** сводится к неравенству вида

Если равносильно системе неравенств

Если равносильно системе неравенств

Так как функция возрастает при и убывает при .

Пример 12. Решить неравенство

Решение. Так как , то неравенство равносильно системе

Ответ. .

Пример 13. Решить неравенство

Решение. Так как , то неравенство равносильно системе

Ответ. .

Пример 14. Решить неравенство

Решение. Так как , то неравенство равносильно

.

Ответ. .

Пример 15.

Решение. Так как , то неравенство равносильно

Ответ. .

# 3. Задания для самостоятельного решения.

1. Решить иррациональные уравнения и неравенства.

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724aa.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ab.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ac.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ad.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ae.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724af.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ag.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ah.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ai.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724aj.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724ak.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724al.png

https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u180750/t1512504724am.png

1. Решить логарифмические уравнения и неравенства.

{{\log }_{2}}(4-x)~=~7

{{\log }_{5}}(4+x)~=~2

{{\log }_{2}}(4-x)~=~{{\log }_{2}}11

{{\log }_{2}}(15+x)~=~{{\log }_{2}}3

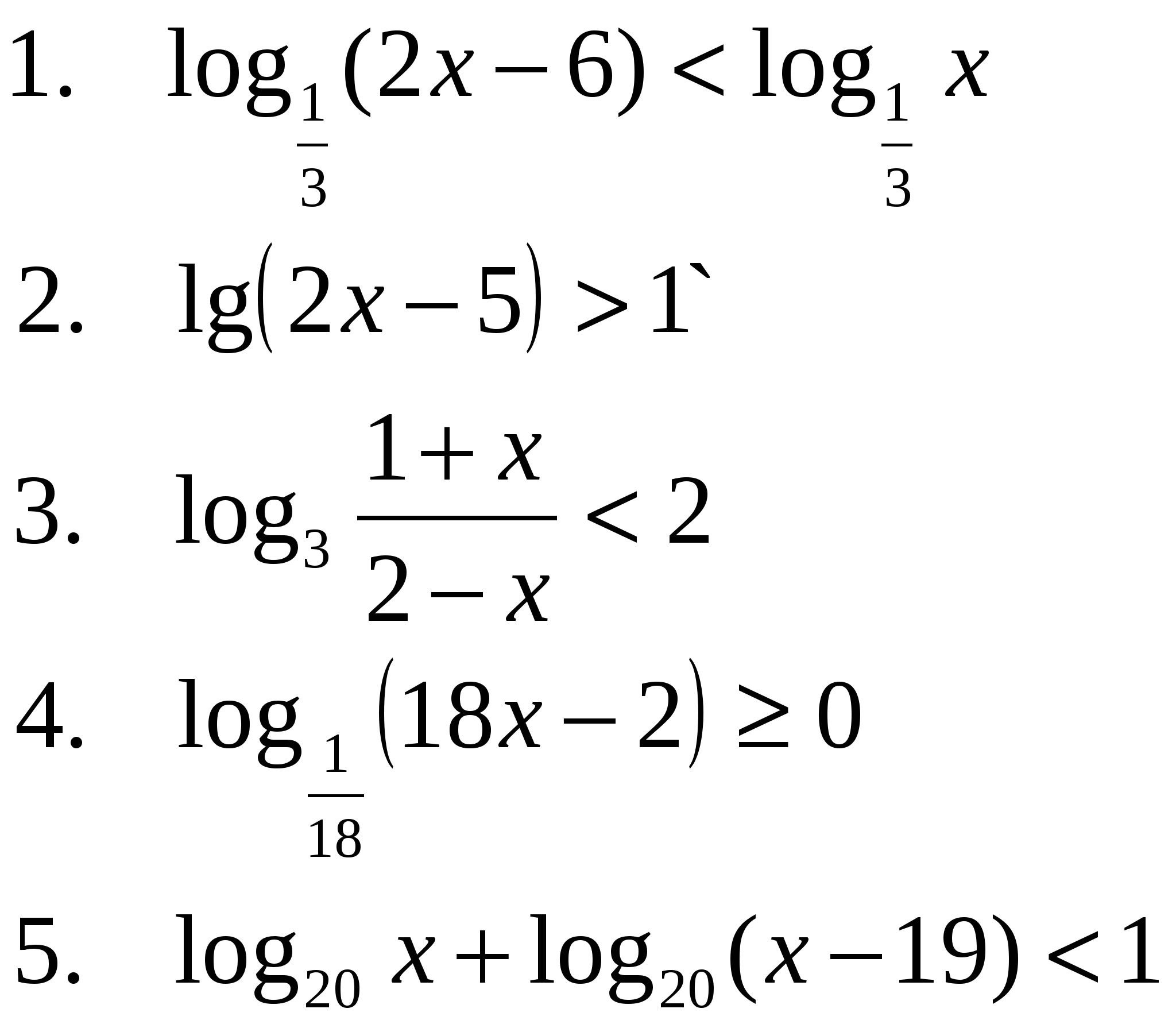
{{\log }_{8}}(x+5)~=~{{\log }_{8}}(2x-2)

{{\log }_{\frac{1}{7}}}(7-x)~=~-2

{{\log }_{3}}(5-x)~=~2{{\log }_{3}}2

\log_7 (x^2 +5x)=\log_7 (x^2 +6)

\log_3 (3 -4x)=\log_3 (1 -5x) +1



# Список, используемой литературы.

1. Алгебра и начала анализа(профильный уровень). 10 кл.: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская; Под ред. А. Г. Мордковича. – 5-е изд. – М.: Мнемозина, 2013. 315 с.
2. Иррациональные уравнения и неравенства. Шахмайстер А.Х. – издательство: Виктория Плюс, 2018 г. – 216 с. Серия: Математика. Элективные курсы
3. Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: монография/ В.А. Байдак. – 3-е издание, стереотип М:ФЛИНТА, 2016 г. – 264 с.

Интернет-ресурсы:

Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [для общего, среднего профессионального, дополнительного образования; полнотекстовый ресурс свободного доступа] : сайт. – URL: http://fcior.edu.ru.