

ГОУ СПО «Пензенский колледж управления  
и промышленных технологий им. Е.Д. Басулина»

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

для специальностей 190604.51 «Техническое обслуживание и ремонт  
автомобильного транспорта» 140613.51 «Техническая эксплуатация и  
обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по  
отраслям), 151001.51 «Технология машиностроения», 200109.51  
«Электромеханические приборные устройства»

(№ специальности и ее наименование)

Математика

---

наименование дисциплины по примерному учебному плану)

математических и общих естественнонаучных дисциплин и  
информационных технологий

Методические указания для студентов по проведению практических занятий  
для специальностей **12.02.04** – Электромеханические приборные устройства  
**15.02.08** «Технология машиностроения» по программе углубленной  
подготовки и базовой подготовки;

**12.02.04** «Электромеханические приборные устройства» по программе  
базовой подготовки;

**12.02.03** «Радиоэлектронные приборные устройства» по программе базовой  
подготовки;

**13.02.11** «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и  
электромеханического оборудования (по отраслям) по программе базовой  
подготовки.

(№ специальности и ее наименование)\_

Математика

—  
(наименование дисциплины)

Автор: Т.В.Илюшина  
(Ф.И.О.)

Рецензенты: Л.В. Вишневская  
(Ф.И.О.)

Методист ГАПОУ ПО ПКИПТ(ИТ- колледж)

Н.В. Тихонова (Ф.И.О.)

преподаватель высшей категории ГАПОУ ПО ПКИПТ(ИТ- колледж)

## **Рецензия**

на методические указания по проведению практических работ по математике

для специальностей **12.02.04** – Электромеханические приборные устройства

**15.02.08** «Технология машиностроения» по программе углубленной подготовки и базовой подготовки;

**12.02.04** «Электромеханические приборные устройства» по программе базовой подготовки;

**12.02.03** «Радиоэлектронные приборные устройства» по программе базовой подготовки;

**13.02.11** «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)» по программе базовой подготовки.

Методические указания практических работ составлены в соответствии с рабочей программой по математике для студентов средних профессиональных учебных заведений по техническим специальностям.

Содержание практических заданий полностью соответствует действующей программе по математике для средних специальных учебных заведений.

В качестве основы для формирования практических навыков дифференциального и интегрального исчисления используется теоретический материал согласно программе по профессиональному среднему образованию.

В ходе практических работ студенты овладевают умениями вычислять: производную функций по алгоритму, производную сложных функций, частные производные; интегрировать функции; применять производную и интеграл для решения прикладных задач; решать дифференциальные уравнения, применять их для решения задач; находить значения функции с помощью ряда Маклорена; решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятности; находить функцию распределения случайной величины.

Методические указания в достаточной мере дают возможность использовать полученные теоретические знания в практическом применении.

Настоящие указания ориентированы на оказание помощи студентам в самостоятельной работе по овладению умениями решать задачи по разделу «Математический анализ», «Элементы теории вероятностей и математической статистики». Они соответствуют Государственным требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по техническим специальностям.

**Рецензенты:** Л.В. Вишневская  
(Ф.И.О.)

Методист ГАПОУ ПО ПКИПТ(ИТ- колледж)

Н.В. Тихонова (Ф.И.О.)

## **Предисловие**

Настоящие указания предназначены для студентов СПО социально-экономического профиля, составлены в соответствии с программой по математике для студентов средних профессиональных учебных заведений.

В содержание указанных практических работ включены теоретические сведения, описанные приемы решений типовых задач, образцы записи решений, задания для самостоятельного решения и примечание. Задания снабжены подробными указаниями для выполнения и разработаны на основе методики уровневой дифференциации.

Практические работы №1 «Вычисление пределов функций. Исследование функций на непрерывность», №2 «Дифференцирование функций», №3 «Приложения производной», №9 «Решение простейших задач на определение вероятности» содержат задания для закрепления и проверки знаний, включают обязательную и дополнительную части и выполняются по вариантам. Практические работы №2 «Дифференцирование функций», №8 «Разложение функции в ряд Маклорена», №10 «Нахождение функции распределения случайной величины» выполняются по вариантам. Практическая работа №4 «Интегрирование простейших функций. Решение прикладных задач» содержит задания различного уровня сложности: студентам предлагаются задания по выбору. Задания 2-го и 3-его уровня студенты решают самостоятельно. При выполнении заданий №1 а), б), г), №3, №4 студенты могут проконсультироваться у преподавателя. Практические работы №5 «Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение прикладных задач», №6 «Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение прикладных задач», №7 «Решение дифференциальных уравнений второго порядка. Решение прикладных задач» содержат задания с выбором ответа.

## **Требования к знаниям и умениям студентов**

1. Знать и уметь использовать математические методы при решении прикладных задач.
2. Применять простейшие математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности.

## Практическая работа №1

### Вычисление пределов функций. Исследование функций на непрерывность.

#### 1. Цель работы:

Научиться:

- находить пределы:

а) функции в точке  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $x_0 \in D(f)$ ;

б) функции при  $x \rightarrow \infty$ ;

- исследовать на непрерывность функцию;
- находить точки разрыва и исследовать их характер.

#### Студент должен знать:

- предел функции;
- теоремы о пределах;
- правила раскрытия неопределенностей;
- непрерывность функции;
- точки разрыва.

#### Студент должен уметь:

- находить пределы;
- исследовать функцию на непрерывность;
- находить точки разрыва.

#### 2. Основные теоретические положения.

При вычислении пределов функций, записанных в виде дроби, могут встретиться следующие случаи:

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = b \neq 0$ , тогда, по теореме о пределах дроби,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{w(x)} = \frac{a}{b}.$$

2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = b \neq 0$ , тогда по теореме о пределах дроби,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{w(x)} = 0.$$

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \neq 0; \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$ , тогда по теореме о связи бесконечной

малой и бесконечно большой функции,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{w(x)} = \infty$  - предела нет;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c; \lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{w(x)} = 0.$$

4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{w(x)}$  - неопределенное

выражение  $\frac{0}{0}$ ;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{w(x)} \text{ - неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}.$$

### Правила раскрытия неопределенностей:

1) В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , достаточно числитель и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

2) Чтобы раскрыть неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

3) Чтобы раскрыть неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ , надо числитель и знаменатель дроби разделить на наивысшую степень переменной (или на наивысшую степень аргумента в знаменателе).

4) При раскрытии неопределенности вида  $\infty - \infty$  нужно числитель и знаменатель одновременно умножить на сопряженное выражение и тем самым свести к неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

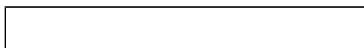
- 1-ый замечательный предел (раскрывает неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ )

6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 + \lambda)^{1/\lambda} = e$$

– 2-ой замечательный предел (раскрывает неопределенность вида  $1^\infty$ ).



7) При раскрытии неопределенности  $0 \cdot \infty$  с помощью преобразований свести к  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Определение непрерывности в точке  $x=a$**

$$\begin{array}{l} 1. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \\ 2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{array}$$

Если в точке  $x_0$  нарушаются условия непрерывности функции, то такую точку называют **точкой разрыва** функции.

Точка разрыва  $x_0$  называется **точкой разрыва первого рода** функции  $y=f(x)$ , если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$ . При

этом:

а) если  $A_1 = A_2$ , то точка  $x_0$  называется **точкой устранимого разрыва**;

б) если  $A_1 \neq A_2$ , то точка  $x_0$  называется **точкой конечного разрыва**.

Величину  $|A_1 - A_2|$  называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва  $x_0$  называется **точкой разрыва второго рода** функции  $y=f(x)$ , если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

### Решения типовых примеров

Найти пределы:

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5)$ .

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 - 5 = 13.$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x - 8}$ .

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x - 8} = \infty.$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$ .

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}) \cdot (\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}}{-2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 3}).$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 3}) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 3})(x + \sqrt{x^2 - 3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - 3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x + \sqrt{x^2 - 3}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3)} = +\infty.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x/3}\right)^{(x/3) \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right]^3 = e^3.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}.$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4 \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 4x} = \frac{4}{3} \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}.$$

Решение:

Полагая  $\arcsin 3x = \alpha$ , имеем  $\sin \alpha = 3x$ . Произведем преобразования:

$$\frac{\arcsin 3x}{2x} = \frac{3 \arcsin 3x}{2 \cdot 3x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha}.$$

Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha}\right) = \frac{3}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

9) Исследовать на непрерывность функцию

$$y = 3x^2 - 2x$$

Решение:

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$  и найдем приращение функции  $\Delta y$ :

$$-y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - (3x^2 - 2x) = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x$$

$$y = 3x^2 - 2x$$

$$\Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{x \rightarrow 0} 3\Delta x = 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 3 \cdot 0 = 0$$

Функция  $y = 3x$  непрерывна при любом значении  $x$ .

- 10) Для заданной функции найти точки разрыва и исследовать их характер  $y = \frac{x}{x-3}$ .

Решение:

Данная функция определена при всех значениях  $x$ , кроме  $x = 3$ . Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка  $x = 3$ . Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при  $x \rightarrow 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty.$$

Следовательно, функция  $\frac{x}{x-3}$  в точке  $x = 3$  имеет бесконечный разрыв, т. е.  $x = 3$  - точка разрыва II рода.

- 11) Для заданной функции найти точки разрыва и исследовать их характер  $y = \frac{1}{1+5^{1/x}}$ .

Решение:

В этом случае единственной точкой разрыва является точка  $x = 0$ . Вычислим односторонние пределы функции при  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+5^{1/x}} = 1, \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+5^{1/x}} = 0.$$

Поскольку левый и правый пределы функции при  $x = 0$  являются конечными,  $x = 0$  - точка разрыва I рода.

- 12) Дана функция  $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ .

Найти точки разрыва и исследовать их характер

Решение:

В точке  $x=5$  функция не определена, т.к. выполнив подстановку, получаем неопределенность  $[\frac{0}{0}]$ , т.к.  $x - 5 \neq 0$ , в других точках можно сократить на  $x - 5$ .

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5-0} (x + 5) = 10 \quad \lim_{x \rightarrow 5+0} (x + 5) = 10$$

Точка  $x = 5$  - разрыва I рода - устранимый разрыв.

### 3. Специальное оборудование: Микрокалькулятор.

### 4. Рабочие задания:

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите темы «Предел функции», «Непрерывность функции», «Точки разрыва функции» (гл. 6, § 1,5,6).

3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.

4) Решить примеры:

### Задания

#### Обязательная часть

Вариант I	Вариант II
<p>Найти пределы:</p> <p>1. а) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6}</math> ;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 17x + 10}{3x^2 - 16x + 5}</math> ;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 + x + 1}</math> ;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^x</math> ;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2}</math> .</p> <p>3. Исследовать на непрерывность функцию <math>y=3x</math></p> <p>4. Найти точки разрыва и исследовать их характер</p> <p><math>y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}</math></p>	<p>Найти пределы:</p> <p>1. а) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x^2 + 2x}</math> ;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}</math> ;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - x^3 + 2x}{x^4 - 8x^3 + 1}</math> ;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^{-x}</math> ;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x}</math> .</p> <p>3. Исследовать на непрерывность функцию <math>y=x^2-4</math> при <math>x=3</math></p> <p>4. Найти точки разрыва и исследовать их характер</p> <p><math>y = \frac{3}{x^2 - 2x + 1}</math></p>

#### Дополнительная часть

Найти пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{3x})^x$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{5}{4x})^x$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{2x}{3})^{2/3x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{5}{3x})^{2x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{z})^{-z}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x}{2x+1})^x$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^{x+0,5}}{2x+1}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi/2 - x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{3x}$

12. Найти точки разрыва и исследовать их характер:

а)  $y = 1 + 2^{1/(x-2)}$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{2x - 3})$$

$$6) y = \frac{1}{x^2}$$

13. Исследовать на

непрерывность:  $y = x - 3x^2$

### 5. Порядок выполнения практической работы:

- 1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.
- 2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.
- 3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.
- 4) Решите примеры.
- 5) Сделайте вывод.

### 6. Содержание отчета студента:

- 1) Дата выполнения работы.
- 2) Номер работы и её название.
- 3) Цель работы.
- 4) Специальное оборудование.
- 5) Решение примеров.
- 6) Вывод.
- 7) Ответы на контрольные вопросы

### 7. Контрольные вопросы

1. Дать определение предела функции в точке.
2. Что такое приращение функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке (два определения)?
4. Что называется точкой разрыва функции? На какие два типа делятся точки?
5. Что значит точка устранимого разрыва, точка скачка функции?
6. Сформулировать связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.
7. Как раскрыть неопределенность вида  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $1^\infty$ .

### 8. Литература:

Математика: учеб. пособие В.П.Омельченко, Э.В.Курбатова, 2007(Среднее профессиональное образование).

Практическая работа №2  
Дифференцирование функций

**1. Цель работы:**

Научиться находить производную элементарных функций, частные производные.

**Студент должен знать:**

- формулы производной элементарных функций, правила дифференцирования, определение частных производных.

**Студент должен уметь:**

- дифференцировать элементарные функции.

**2. Основные теоретические положения**

**Правила дифференцирования**

1)  $(C)' = 0$ ;

2)  $[Cf(x)]' = Cf'(x)$ ;

3)  $[U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x)$ ;

4)  $[U(x) \cdot V(x)]' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$ ;

5)  $\left[ \frac{U(x)}{V(x)} \right]' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}$ ;

6)  $f'(x) = f'(U) \cdot U'(x)$  или  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  – производная сложной функции  
 $U(x)$  – промежуточная функция

**Производная основных элементарных функций**

1)  $(x^a)' = ax^{a-1}$ ;

2)  $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$ ;

3)  $(e^x)' = e^x$ ;

4)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; a \neq 1$ ;

5)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;

6)  $(\sin x)' = \cos x$ ;

7)  $(\cos x)' = -\sin x$ ;

8)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;

9)  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ;

10)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

11)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

12)  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ;

13)  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

**Частной производной** функции  $z = f(x, y)$  **по переменной**  $x$  называется производная этой функции при постоянном значении переменной  $y$ ; она обозначается  $\frac{\partial z}{\partial x}$  или  $z'_x$ .

**Частной производной** функции  $z = f(x, y)$  **по переменной**  $y$  называется производная этой функции при постоянном значении переменной  $x$ , она обозначается  $\frac{\partial z}{\partial y}$  или  $z'_y$ .

### Решение типовых примеров

Найти производную следующих функций:

1)  $y = \arcsin 2x$ .

Решение:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} (2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

2)  $y = \operatorname{arctg} 3x$ .

Решение:

$$y' = -\frac{1}{1+(3x)^2} \cdot (3x)' = -\frac{1}{1+9x^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Найти частные производные функции:

3)  $z = x^3 + 2xy^2 + 3y^3$ .

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4xy + 9y^2.$$

**3.Специальное оборудование:** «Таблица производных элементарных функций, правил дифференцирования», МК.

### 4. Рабочие задания:

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите темы «Производные элементарных функций», «Частные производные» (гл 2;2.1.7;2.1.8, конспект).
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить примеры:

### Вариант I

Вычислить производную функций

1.  $y = 2 \arcsin x + \arccos x$ ;
2.  $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x + 6x^2 \sqrt{x}$ ;
3.  $f(x) = \ln x \cdot e^x$ ;

4. Найти производную функции при данном значении аргумента

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x; f'(\sqrt{3}) - ? ;$$

5. Найти частные производные функции:

$$z = x^3 - 3x^2y + 4x^3y^2 - y^3 .$$

### Вариант II

Вычислить производные функций

1.  $y = 5 \arcsin x + 2 \arccos x ;$

2.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3x - 2x^2\sqrt{x} ;$

3.  $f(x) = e^x - xe^x ;$

4. Найти производную функции при данном значении аргумента

$$f(x) = \arcsin 2x; f'(0) - ? ;$$

5. Найти частные производные функции:

$$z = \frac{3x}{y} .$$

### Вариант III

Вычислить производные функций

1.  $y = x(\arcsin x + \arccos x) ;$

2.  $f(x) = \frac{6}{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - 6x + x^2\sqrt{x} ;$

3.  $f(x) = x^2 \cdot e^x ;$

4. Найти производную функции при данном значении аргумента

$$f(x) = \operatorname{arccos} \sqrt{1-x}; f'\left(\frac{1}{2}\right) - ? ;$$

5. Найти частные производные функции:

$$z = \frac{y - 3x}{x + 4y} .$$

### Вариант IV

Вычислить производные функций

1.  $y = 6 \arcsin x$  ;
2.  $f(x) = \frac{3}{x^3} + 6x - \frac{2}{3\sqrt{x}} + x^2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$  ;
3.  $f(x) = 5 \ln x + e^x$  ;
4. Найти производную функции при данном значении аргумента  
 $f(x) = 6 \arcsin x - 2 \arccos x$ ;  $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$  ;
5. Найти частные производные функции:  
 $z = \ln(2x - y)$  .

### 5. Порядок выполнения практической работы:

- 1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.
- 2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.
- 3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.
- 4) Решите примеры.
- 5) Сделайте вывод.

### 6. Содержание отчета студента:

- 1) Дата выполнения работы.
- 2) Номер работы и её название.
- 3) Цель работы.
- 4) Специальное оборудование.
- 5) Решение примеров.
- 6) Вывод.
- 7) Ответы на контрольные вопросы

### 7. Контрольные вопросы:

1. Привести примеры элементарных функций.
2. Назвать формулы элементарных функций, правил дифференцирования.

### 8. Литература:

Математика: учеб. пособие В.П.Омельченко, Э.В.Курбатова, 2007(Среднее профессиональное образование).

## Приложения производной.

### 1. Цель работы:

Научиться решать задачи прикладного характера на применение производной.

Студент должен знать:

- физический, геометрический смысл производной;
- теорему о нахождении точек минимума и максимума с помощью производной;
- теорему о точках перегиба;
- уравнение касательной к графику функции.

Студент должен уметь:

- составлять уравнения касательной к графику функции;
- находить точки минимума и максимума и точки перегиба.

### 2. Основные теоретические положения.

Алгоритм решения задачи на составление уравнения касательной к графику функции в точке с абсциссой  $x_0$ :

- 1) Найти ординату точки касания  $y_0 = f(x_0)$ . Записать точки касания  $M_0 = (x_0; y_0)$ .
- 2) Определить угловой коэффициент касательной  $k = f'(x_0)$ .
- 3) Составить уравнение касательной:  $y - y_0 = k(x - x_0)$ . Дать ответ в виде уравнения общего вида.

**Правило нахождения промежутков монотонности функции  $y = f(x)$ .**

Возрастание и убывание функции  $y = f(x)$  характеризуется знаком ее производной: *если в некотором промежутке  $f'(x) > 0$ , то функция возрастает в у этом промежутке; если же  $f'(x) < 0$ , то функция убывает в этом промежутке.*

**Правило нахождения экстремумов функции  $y = f(x)$ .**

I. Найти производную  $f'(x)$ .

II. Найти критические точки функции  $y = f(x)$ , т. е. точки, в которых  $f'(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной  $f'(x)$  в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $f(x)$ . При этом критическая точка  $x_0$  есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором  $f'(x) < 0$ , от промежутка, в котором  $f'(x) > 0$ , и точка максимума — в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой  $x_0$ , знак производной не меняется, то, в точке  $x_0$  функция экстремума не имеет.



Правило нахождения промежутков выпуклости и вогнутости из точек перегиба графика функции.

- I. Найти вторую производную  $f''(x)$ .
- II. Найти критические точки функции  $y=f(x)$ , в которых  $f''(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.
- III. Исследовать знак второй производной  $f''(x)$  в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $f(x)$ . Если при этом критическая точка  $x_0$  разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то  $x_0$  является абсциссой точки перегиба функции.
- IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

### Общая схема исследования функции и построение её графика.

- I. Найти область определения функции.
- II. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
- III. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
- IV. Найти асимптоты графика функции.
- V. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
- VI. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
- VII. Построить график, используя полученные результаты исследования.

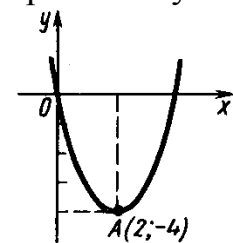
### Решение типовых примеров и задач.

1) Исследовать на экстремум функцию:

$$f(x) = x^2 - 4x;$$

Решение:

Находим  $f'(x) = 2x - 4$ . Полагая  $f'(x) = 0$ , получим единственную критическую точку  $x=2$ . Дальнейшие рассуждения представлены в таблице:



x	$-\infty < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↘	Минимум $f_{\min} = f(2) = -4$	↗

График функции  $f(x) = x^2 - 4x$  есть парабола. Точка минимума (2; -4) является вершиной параболы.

2) Составить уравнение касательной к параболе  $y=2x^2-6x+3$  в точке  $M_0(1;-1)$ .

Решение:

Найдём производную функции  $y=2x^2-6x+3$  при  $x_0=1$ . Имеем  $y'=4x-6$  откуда  $y'(1)=-2$ ,  $y(1)=1$ .

Получим искомое уравнение касательной:  $y-1=-2(x-1)$  или  $y+2x-3=0$ .

3) Построить график функции  $y = \frac{x^2}{x-3}$ .

1. Находим область определения функции:  $D(y) = \begin{cases} -\infty < x < 3 \\ 3 < x < +\infty. \end{cases}$

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

3. При  $x = 0$  получим  $y = 0$ , т. е. график проходит через начало координат.

4. Так как  $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} f(x) = \pm \infty$  то прямая  $x = 3$  служит вертикальной асимптотой графика.

Далее находим:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x(x-3)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[ \frac{x^2}{x-3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x}{x-3} = 3.$$

Следовательно, прямая  $y=x+3$  является наклонной асимптотой графика.

5. Находим

$$y' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

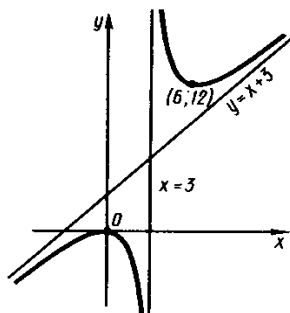
Производная  $y'$  обращается в нуль в точках  $x = 0$  и  $x = 6$  и терпит разрыв при  $x = 3$ . Этими точками числовая прямая делится на четыре промежутка:  $-\infty < x < 0$ ,  $0 < x < 3$ ,  $3 < x < 6$  и  $6 < x < \infty$ . Исследуем знак  $y'$  в каждом из них; очевидно, что  $y' > 0$  в промежутках  $-\infty < x < 0$  и  $6 < x < \infty$  (в этих промежутках функция возрастает) и  $y' < 0$  в промежутках  $0 < x < 3$  и  $3 < x < 6$  (в этих промежутках функция убывает). При переходе через точку  $x=0$  производная меняет знак с плюса на минус, т. е. это точка максимума, а при переходе через  $x = 6$  — с минуса на плюс, т. е. это точка минимума. Находим  $y_{\max} = y(0) = 0$ ,  $y_{\min} = y(6) = 12$ .

6) Находим

$$y'' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^2}.$$

Вторая производная в нуль нигде не обращается и терпит разрыв при  $x = 3$ . В промежутке  $-\infty < x < 3$  имеем  $y'' < 0$ , т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх; в промежутке  $3 < x < \infty$  имеем  $y'' > 0$ , т. е. в этом промежутке кривая выпукла вниз. Точек перегиба нет.

7. На основании полученных данных строим график функции.



**3. Специальное оборудование:** Таблица «Производная элементарных функций, правил дифференцирования»; МК.

**4. Рабочие задания:**

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите тему «Приложения производной» (гл. 2; 2.1.10, конспект).
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить примеры:

**Обязательная часть.**

**I Вариант**

- 1) Составить уравнение касательной к кривой  $y=x^2+4x^2-1$  в точке с абсциссой  $x_0=1$ .
- 2) Точка движется прямолинейно по закону  $S=1+t^2-\frac{1}{4}t^4$ . Найти скорость и ускорение движения в момент времени  $t=0$ .
- 3) Найти экстремумы функции  $y=2x^2+7x-5$ .
- 4) Найти промежутки выпуклости кривой и точек перегиба  $y=-x^3+6x^2-9x+3$ .
- 5) Исследовать функцию и построить её график  $y=x^3-6x^2-9x+3$ .

**II Вариант**

- 1) Составить уравнение касательной к параболы с абсциссой  $x_0=-1$ .
- 2) Точка движется прямолинейно по закону  $S=1+t^2-\frac{1}{4}t^4$  в точке  $t=1$ .
- 3) Исследовать на экстремум функцию  $f(x)=x^2-4x$ .
- 4) Найти промежутки выпуклости кривой и точек перегиба  $f(x)=x^3$ .
- 5) Исследовать функцию и построить её график  $y=\frac{1}{4}x^4$ .

### III Вариант

- 1) Составить уравнение касательной к кривой  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ .
- 2) Точка движется прямолинейно по закону  $S = 1 + t^2 - \frac{1}{4}t^4$ . Найти скорость и ускорение движения в момент времени  $t = 2$ .
- 3) Найти экстремумы функции  $y = x^2 + 3x$ .
- 4) Найти промежутки выпуклости кривой и точек перегиба  $f(x) = x^3 - x$ .
- 5) Исследовать функцию и построить её график  $y = x^4 - 5x^2 + 4$ .

### IV Вариант

- 1) Составить уравнение касательной к кривой  $y = x^3 - 2x - 1$  в точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .
- 2) Точка движется прямолинейно по закону  $S = 1 + t^2 - \frac{1}{4}t^4$ . Найти скорость и ускорение движения в момент времени  $t = 1$ .
- 3) Найти промежутки выпуклости кривой и точек перегиба  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ .
- 4) Найти экстремумы функции  $y = 2x^4 - x$ .
- 5) Исследовать функцию и построить её график  $y = x^3 - 3x$ .

### Дополнительная часть.

- 1) Исследовать функцию и построить её график
  - а)  $y = \frac{x}{x-2}$ ;
  - б)  $y = \frac{x}{x^2-4}$ .
- 2) Из листа картона 80см×50см требуется изготовить открытый сверху ящик наибольшей вместимости, вырезая по уголкам равные квадратики и загибая затем получившиеся выступы.

### 5. Порядок выполнения практической работы:

- 1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.
- 2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.
- 3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.
- 4) Решите примеры.
- 5) Сделайте вывод.

## **6. Содержание отчета студента:**

- 1) Дата выполнения работы.
- 2) Номер работы и её название.
- 3) Цель работы.
- 4) Специальное оборудование.
- 5) Решение примеров.
- 6) Вывод.
- 7) Ответы на контрольные вопросы

## **7. Контрольные вопросы.**

- 1) В чём заключается геометрический смысл производной ?
- 2) Какие данные нужно иметь, чтобы составить уравнение касательной к графику функции в данной точке?
- 3) Какие точки называются критическими точками?
- 4) Какими точками отделяются промежутки возрастания от промежутков убывания функции?
- 5) Какая кривая называется выпуклой вверх? выпуклой вниз?
- 6) Какая точка называется точкой перегиба функции, как её найти?

## **8. Литература:**

Математика: учеб. пособие В.П.Омельченко, Э.В.Курбатова, 2007(Среднее профессиональное образование).

## Практическая работа №4

### Интегрирование простейших функций. Решение прикладных задач

#### 1. Цель:

- Научиться находить простейшие неопределённые и определённые интегралы, применять их для решения прикладных задач.

#### 2. Основные теоретические положения

Основные свойства неопределённого интеграла

1.  $d(\int f(x)dx) = f(x) + C$ , 2.  $\int df(x) = f(x) + C$ , 3.  $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$  - постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

4.  $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$  - интеграл суммы равен сумме интегралов.

Таблица основных формул интегрирования

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(a) - F(b). - \text{формула Ньютона-}$$

Лейбница

Основные свойства определённого интеграла

$$1. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, 2. \int_a^a f(x)dx = 0, 3.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

4. Определённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определённых интегралов.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

Геометрический смысл определённого интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x=a$ ;  $x=b$ ;  $y=0$  и частью графика функции  $y=f(x)$ .

#### Алгоритм решения задачи на вычисление площади плоской фигуры:

1. Сделать приблизительный график заданных функций, ограничивающих плоской фигуры.
2. Найти пределы интегрирования.
3. Выяснить, какой формулой площади плоской фигуры удобно пользоваться в данном случае.
4. Вычислить площадь заданной фигуры.

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью  $v = f(t) \geq 0$  за промежуток времени вычисляется по формуле  $s = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ .

### Решение типовых примеров и задач

Найти следующие интегралы:

1.  $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$

Решение:

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx = \int (x^2 + 3x + 4) dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx + 4 \int dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 4x + C$$

2.  $\int e^{-3x^2} x dx$

Решение:

т.к.  $x dx = -(\frac{1}{6}) d(-3x^2)$ , то  $\int e^{-3x^2} x dx = -\frac{1}{6} e^{-3x^2} + C$ .

3.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3}$

Решение:

Полагая  $x^2 + 1 = u$ , имеем  $2x dx = du$ ,  $x dx = (\frac{1}{2}) du$ . Значит,

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3} = \int (x^2 + 1)^{-3} x dx = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2 + 1)^2} + C$$

4. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 - 2t$ . Найти закон её движения.

Решение:

Известно, что скорость прямолинейного движения точки равна производной от пути  $S$  по времени  $t$ , т.е.  $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2t$ , откуда  $ds = (3t^2 - 2t) dt$ . Интегрируя, находим  $\int ds = \int (3t^2 - 2t) dt$ ;  $s = t^3 - t^2 + C$

5. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = (3t^2 + 2t + 1)$  м/с.

Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение.  $s = \int_{0t}^{10} (3t^2 + 2t + 1) dt = [t^3 + t^2 + t]_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 (м)$ .

6. Вычислить определённый интеграл:  $\int_2^3 (2x - 1) dx$

Решение. Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки  $2x - 1 = u$ . Дифференцируя, имеем  $2dx = du$ , откуда  $dx = (\frac{1}{2}) du$ . Находим новые пределы интегрирования. Подставляя в соотношение  $2x - 1 = u$  значения  $x = 2$  и  $x = 3$ , соответственно получим  $u_H = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ ,  $u_B = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ . Следовательно,  $\int_2^3 (2x - 1) dx = \int_3^5 u du = \frac{u^2}{2} \Big|_3^5 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$ .

7. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

$y = \sin x, y = 0, x = \pi$ .

Искомая площадь ограничена полуволной синусоиды и осью Ох. Имеем

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - \cos 0 = 1 + 1 = 2 \text{ (кв.ед.)}$$

**3. Специальное оборудование:** «Таблица основных формул интегрирования», **мк**

**4. Рабочие задания:**

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите темы «Неопределённый интеграл, определённый интеграл» (конспект, гл. 2. п.2.1.11-,2.1.12)
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить примеры.

#### Задания по выбору

##### 1 уровень:

1. Найти интегралы:

а)  $\int \frac{3x^2 \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ ; б)  $\int \sin(3x + 2) dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{1 + x^2} dx$ ;

г)  $\int_0^1 e^{2x} dx$ ; д)  $\int_0^{\pi} \sin x dx$ ; е)  $\int_1^2 \sqrt{x} dx$ .

2. Найти интеграл и проверить результат дифференцированием:

$$\int (5x^4 - 4x^2 + 2x - 1) dx.$$

3. Скорость точки задана уравнением  $v = 3t^2 - 2t + 7$ . Найти закон движения, если за время  $t=2$ с точка прошла путь  $S=32$ м.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + x + 6$  и  $y = 0$

##### 2 уровень:

1. Найти интегралы:

а)  $\int (\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2} + 5e^{\frac{7}{5}x}) dx$ ; б)  $\int (\frac{5}{\sqrt{3-x}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-3}}) dx$

в)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$ ; г)  $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$ ; д)  $\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx$ .

ж)  $\int 2 \operatorname{tg} 2x dx$ ; з)  $\int \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}} dx$ ; ё)  $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$ .

2. Найти интеграл и проверить результат дифференцированием:

$$\int (\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3\sqrt{x}} + 3) dx$$

3. Скорость прямолинейного движения точки задано уравнением  $U = 3t^2 - 4t - 4$ . Найти закон движения точки, если за время  $t=2$ с она проходит путь  $S=8$ с.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 2x + 3$  и  $y = 0$



### 3 уровень

1. Найти интегралы:

а)  $\int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 10}$  ;  $\int \cos^4 x dx$  ;

б)  $\int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{4} dx$ ;  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$ ;  $\int_0^1 (2+3x^2)^2 x dx$ .

в)  $\int x \cos(x^2 + 3) dx$  ;  $\int \operatorname{ctg}(x+5) dx$

2. Найти интегралы и проверить результаты дифференцированием:

$$\int (5 \sin 3x + 2 \cos \frac{x}{2}) dx ; \int \operatorname{ctg}(x+5) dx$$

3. Найти уравнение кривой, проходящей через данную точку А, если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой её точке равен К :  
А(1;3) К = 2х+1

4. Скорость точки задана уравнением  $U = t^2 + 3t - 5$  . Найти закон движения, если к моменту начала отсчета времени  $t=0$ , точка прошла путь  $S=3$ м.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

5.  $y=\operatorname{tg}x$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $x=\pi/3$

### 5. Порядок выполнения практической работы:

- 1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.
- 2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.
- 3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.
- 4) Решите примеры.
- 5) Сделайте вывод.

### 6. Содержание отчета студента:

- 1) Дата выполнения работы.
- 2) Номер работы и её название.
- 3) Цель работы.
- 4) Специальное оборудование.
- 5) Решение примеров.
- 6) Вывод.
- 7) Ответы на контрольные вопросы.

### 7. Контрольные вопросы:

1. В чем заключается смысл действия, обратного дифференцированию?
2. Чем отличаются друг от друга любые две первообразные данной функции  $f(x)$ ?
3. В чем заключается геометрический смысл неопределённого и определённого интеграла?
4. Как проверить правильно ли найдена первообразная данной функции  $f(x)$ ?

5. В чем заключается непосредственное интегрирование и способ подстановки
6. Назвать формулу Ньютона-Лейбница.

**8. Литература:**

Математика: учеб. пособие В.П.Омельченко, Э.В.Курбатова, 2007(Среднее профессиональное образование).

**Практическая работа №5**  
**Решение дифференциальных уравнений первого порядка с**  
**разделяющимися переменными, однородных дифференциальных**  
**уравнений первого порядка.**  
**Решение прикладных задач**

**1. Цель:**

- Научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения первого порядка и применять их для решения прикладных задач.

**Студент должен знать:**

- определение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, однородного дифференциального уравнения первого порядка.

**Студент должен уметь:**

-решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения первого порядка, применять их для решения прикладных задач.

**2. Основные теоретические положения**

**Определение 1.** Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка  $y' = f(x, y)$  называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно представить в виде  $y' = f_1(x)f_2(y)$ . Предположим, что  $f_2(y) \neq 0$ . Тогда уравнение можно переписать так:  $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ . – уравнение с разделёнными переменными.

**Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:**

1. Производную функцию переписать через её дифференциалы.
2. Члены уравнения с одинаковыми дифференциалами перенести в одну сторону равенства и вынести дифференциал за скобку.
3. Разделить переменные на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только  $x$ , а в другую только  $y$ .
4. Проинтегрировать обе части равенства, найти общее решение.
5. Если заданы начальные условия, найти частное решение.

Функция  $f(x, y)$  называется **однородной функцией  $n$ -го порядка (измерения)**, если при умножении каждого её аргумента на произвольный множитель  $\lambda$  вся функция умножится на  $\lambda^n$ , т.е.  $f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x, y)$ .

Например, функция  $f(x, y) = x^2 - 2xy$  есть однородная функция второго порядка, поскольку  $f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 \cdot (x^2 - 2xy) = \lambda^2 \cdot f(x, y)$ .

**Определение 2.** Дифференциальное уравнение первого порядка  $y' = f(x; y)$  называется *однородным*, если его можно представить в виде,  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – однородные функции одинакового порядка.

### Алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка

- 1) Производную функцию переписать через её дифференциалы.
- 2) Определить однородное дифференциальное уравнение первого порядка;
- 3) Ввести подстановку  $y = x \cdot z$ ,  $dy = z \cdot dx + x \cdot dz$  или  $y' = z \cdot x' + x \cdot z'$ .
- 4) Привести однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными;
- 5) Найти общее решение; подставив  $z = \frac{y}{x}$ , записать ответ.

### Решение типовых примеров и задач

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения  $x(1 + y^2)dx = ydy$ .

**Решение:** Разделив переменные на  $1 + y^2$ , имеем  $x dx = \frac{y dy}{1 + y^2}$ .

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int x dx = \int \frac{y dy}{1 + y^2}, \quad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + \frac{1}{2} \ln C, \quad x^2 = \ln(1 + y^2)C - \text{общее решение}$$

данного уравнения.

**Пример 2.** Найти частное решение уравнения  $stgtdt + ds = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $s = 4$  при  $t = 60^\circ$

**Решение:**

Разделив переменные на  $s$ , имеем  $tgt + \frac{ds}{s} = 0$ ,

проинтегрируем обе части полученного уравнения  $\int tgt dt = \int \frac{ds}{s} = \ln C$ ,  
 $-\ln \cos t + \ln s = \ln C$ ,

или  $\ln s = \ln \cos t + \ln C$ ,  $s = C \cos t$ , - общее решение данного уравнения.

Для нахождения значения постоянной  $C$  подставим значения  $t = 60^\circ$  и  $s = 4$  в выражение для общего решения:  $4 = C \cos 60^\circ$ , или  $4 = \frac{C}{2}$ , откуда  $C = 8$ .

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид

**Пример 3.** Составить уравнение кривой, проходящей через точку  $M(2; -3)$  и имеющей касательную с угловым коэффициентом  $4x - 3$ .

**Решение:** На основании геометрического смысла производной имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3, \text{ и л и } dy = (4x - 3)dx. \text{ Проинтегрировав, получим } y = 2x^2 - 3x + C.$$

Используя начальные условия  $x=2$  и  $y=-3$ , находим  $C=-5$ . Следовательно,  $y = 2x^2 - 3x + C$ .

**Пример 4.**

Скорость распада радия в момент времени  $t$  пропорциональна его количеству  $m(t)$ . Пусть в начальный момент времени масса радия  $m_0=200$  г. Сколько радия останется через 300 лет, если известно, что период  $T$  полураспада радия (промежуток времени, через который первоначальная масса радия уменьшается в два раза) равен 1550 лет.

**Решение:** Из условия задачи имеем  $\frac{dm}{dt} = -km$ , где  $k > 0$ . Знак минус показывает, что масса радия убывает, скорость распада убывает, следовательно, скорость распада  $\frac{dm}{dt}$  отрицательна.  $m(t) = Ce^{-kt}$  – общее решение уравнения. Согласно условию  $m(0) = 200$ , имеем:

$200 = Ce^{-k \cdot 0} \Leftrightarrow C = 200$ . Следовательно,

$m(t) = 200e^{-kt}$ . Коэффициент  $k$  найдем из условия, что

$$m(t) = \frac{1}{2}m(0) = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100 \text{ при}$$

$$t = T = 1550; 100 = 200e^{-1550k} \Leftrightarrow e^{-1550k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-1550k} = 2 = e^{\ln 2} \Rightarrow 1550 = \ln 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0,000447,$$

$m(t) = 200e^{-\frac{\ln 2}{1550}t}$ . Положив  $t = 300$ , найдём количество радия, оставшегося

через 300 лет:  $m(300) = 200e^{-\frac{\ln 2}{1550} \cdot 300} \approx 200e^{-0,000447 \cdot 300} \approx 176,5$ г,

**Пример 5.** Найти общее решение уравнения  $(x^2 - 2y)dx + 2xydy = 0$ .

**Решение:**  $P(x, y) = x^2 - 2y^2$ ,  $Q(x, y) = 2xy$  – однородные функции одного измерения,  $\Rightarrow$  данное уравнение является однородным.

$y = z \cdot x$ ,  $dy = zdx + xdz$ . Подставим эти выражения в данное уравнение:

$$x^2 dx - 2(zx)^2 dx + 2xz(xdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow x^2 dx - 2z^2 x^2 dx + 2zx^3 dz = 0 \Leftrightarrow dx + 2zxdz = 0.$$

Разделим переменные:  $2zdz + \frac{dx}{x} = 0$ . Интегрируем почленно это уравнение:

$$\int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow z^2 + \ln|x| = \ln|C| \Leftrightarrow x = Ce^{-z^2}. \text{ Так как } z = \frac{y}{x}, \text{ находим } x = Ce^{-\frac{y^2}{x^2}}.$$

**Пример 6.** Найти закон движения материальной точки, если её скорость задана уравнением  $v = 3t^2 - 2t$ .

**Решение:** известно, что скорость прямолинейного движения точки равна производной от пути  $s$  по времени  $t$ , т.е.  $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2t$ , откуда  $ds = (3t^2 - 2t)dt$ .

Интегрируя, находим  $\int ds = \int (3t^2 - 2t)dt$ ;  $s = t^3 - t^2 + C$ .

**3. Специальное оборудование:** МК, таблицы «Производная элементарных функций, правил дифференцирования», «Основные формулы интегрирования», «Алгоритм решения прикладных задач на составление дифференциальных уравнений».

#### 4. Рабочие задания:

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите темы «Дифференциальные уравнения» (гл. 2;2.2).
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.

#### 4) Решить примеры

**Обязательная часть**  
**Задания с выбором ответа**  
**Вариант-1**

№з ада ни я	Содержание вопросов	Ответы			
		1	2	3	4
1	Составить уравнение кривой, угловой коэффициент касательной которой в любой точке кривой равен $3x$ .	$Y=3x^2+C$	$Y=x^2/2+C$	$Y=3x^2/2+C$	$Y=3x^2-2C$
2	Указать, какие из функций: а) $y = x^3 + x + C$ ; б) $y = \frac{x^3}{3} + x + C$ ; в) $y = x^3 + x = 1$ ; г) $y = 2x^3 + \frac{x}{2} + C$ – являются решениями уравнения $y' = 3x^2 + 1$ ?	в), г)	а)	а), б)	б), г)
3	Указать, какие из уравнений: а) $y - 3x = 4$ ; б) $y^2 - 2x + y = 5$ ; в) $y'' - 8x = 0$ ; г) $d^2y = 3xdx^2$ ; д) $y^3 - 4x - 1 = 0$ ; е) $y + xy' = 0$ – являются дифференциальными?	а), б), г)	в), г), е)	а), в), г), д)	б), г), д), е)
4	Найти частное решение уравнения: $2xyy' = x^2 + y^2$ . если $y=2$ при $x=1$ .	$X^2-y^2+3x=0$	$Y=x^2+C$	$X^3-2x-y=0$	$Y=x^2-2x$
5	Найти закон движения материальной точки, если её скорость задана уравнением $v = t^2 + 4$ .	$S=t^3+4C$	$S=t^3+4t+C$	$S=t^3/3+t+4C$	$S=t^3/3+t+4$

## Вариант-2

№ задания	Содержание вопросов	Ответы				
		1	2	3	4	5
1	Составить уравнение кривой, проходящей через точку. А (1;0), если известно, что угловой коэффициент касательной в каждой её точке равен $\frac{2x+y}{2x}$ .	$(2x-y)^2 = 4x$	$X^2 + 2y = 0$	$Y = 3x + 2y$	$Y = 4y - x^2$	Правильного ответа нет
2	Указать, какие из функций: а) $y = x^2 + x + C$ ; б) $y = \frac{x^2}{2} + x + C$ ; в) $y = 3x + 6$ ; г) $y = x^2 + C$ ; д) $y^3 = \frac{x^3}{3} + C$ – являются решениями уравнения $x^2 dx = 3y^2 dy$ ?	д), е)	д)	а), б)	в), г)	
3	Указать, какие из уравнений: а) $y' - 2x = 5$ ; б) $y = 3x - 4$ ; в) $y'' + 4x = 0$ ; г) $y + 2xy' = 0$ ; д) $(2x + y)dx - 2xdy = 0$ ; е) $y' = 2x$ – являются однородными дифференциальными?	д)	е)	а), б)	в), г)	
4	Найти частное решение уравнения $ydy = xdx$ ; $y = 2$ при $x = 0$ .	$Y^2 = X^2 + 2$	$Y = 3x + 5$	$y - 3x^2 = 0$	$y - 6x^2 + C$	
5	Найти закон движения материальной точки, если её скорость задана уравнением $v = 3t^2 + 5$ .	$S = t^3 + 4C$	$S = t^3 + 4t + C$	$S = 3t^2 + 5$	$S = t^3 + 5t + C$	



### Вариант-3

№ задания	Содержание вопросов	Ответы				Правильного ответа нет
		1	2	3	4	
1	Составить уравнение кривой, проходящей через точку А (3;1), если известен, что угловой коэффициент касательной в каждой её точке равен $3x^2+2$ .	$y=x^3+2x-28$	$y=2x^3+1$	$y=x^2-6$	$y=3\sqrt{x}+6$	
2	Указать, какие из уравнений: а) $y' - 3x = 4$ ; б) $y^2 - 2x + y = 5$ ; в) $y'' - 8x = 0$ ; г) $d^2y = 3xdx^2$ ; д) $y^3 - 4x - 1 = 0$ ; е) $y + xy' = 0$ – являются дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными?	а)	б), в), г)	а), е)	д)	
3	Указать, какие из функций: а) $y = x^2 + x + C$ ; б) $y = \frac{x^3}{3} + x + C$ ; в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$ ; г) $y = 2x^3 + \frac{x}{2} + C$ – являются решениями уравнения $\sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy = 0$ ?	а), б)	в), г)	в)	а), г)	
4	Найти частное решение уравнения, $xy^2y' = x^3 + y^3$ , если $y=1$ при $x=1$ .	$y^3=3x^3(\ln x =9)$	$Y=2x^2+5$	$Y=x-5$	$Y=x^3+2x$	
5	Найти закон движения тела, движущегося прямолинейно со скоростью $v=4t-6t^2$ , если известно, что за время $t=2$ с тело проходит путь $s=5$ м.	$S=2t^2-2t^3+21$	$S=2t-4$	$S=-4t^2$	$S=4t^3+3t^2$	

### Вариант-4



№ задания	Содержание вопросов	Ответы				
		1	2	3	4	5
1	Составить уравнение кривой, проходящей через точку. А (0;4), если известно, что угловый коэффициент касательной в каждой её точке равен $3x-2$	$Y = 3/2x^2 - 2x + 4$	$Y = 3x^3 + 2x^2$	$Y = 4x - 1$	$Y = 4/5x^2$	
2	Указать, какие из уравнений: а) $y - 3x = 4$ ; б) $y^2 - 2x + y = 5$ ; в) $y'' - 8x = 0$ ; г) $d^2y = 3xdx^2$ ; д) $y^3 - 4x - 1 = 0$ ; е) $y + xy' = 0$ – являются дифференциальными первого порядка?	а)	е)	б), в)	г), д)	
3	Указать, какие из функций: а) $y = x^2 + x + C$ ; б) $y = \frac{x^3}{3} + x + C$ ; в) $y^2 = -\frac{2}{3}x^3 + C$ ; г) $y = 2x^3 + \frac{x}{2} + C$ – являются решениями уравнения $x^2dx + ydy = 0$ ?	а), в)	б)	в)	в), г)	
4	Найти частное решение уравнения, $(x - y)dx + xdy = 0$ , если $y=3$ при $x=1$ .	$xe^{\frac{y-x}{x}} = 1$	$xe^x - 2 = 4$	$y=2x$	$xe^{\frac{y}{x}} = 1$	
5	Найти закон движения материальной точки, если её скорость задана уравнением $v=t^2-3$	$s=t^3+4C$	$s = t^3+4t+C$	$s = 3t^2+5$	$s = t^3 - 3t+C$	

### Дополнительная часть

1. Скорость распада радия в момент времени  $t$  пропорциональна его количеству  $m(t)$ . Пусть в начальный момент времени масса радия  $m_0=150$ г. Сколько радия останется через 250 лет, если известно, что период  $T$  полураспада радия (промежуток времени, через который первоначальная масса радия уменьшается в два раза) равен 1550лет

2. Найти частное решение уравнения

$2yy' = 1 - 3x^2$ , если  $y=3$  при  $x=1$ .

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку  $A(1;0)$ , если известно, что угловой коэффициент касательной в каждой её точке равен  $\frac{2x+y}{2x}$ .

4. Найдите частное решение уравнения:

$y^2 dx = e^x dy$ , если  $y=1$  при  $x=0$ .

#### **5. Порядок выполнения практической работы:**

1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.

2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.

3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.

4) Решите примеры.

5) Сделайте вывод.

#### **6. Содержание отчета студента:**

1) Дата выполнения работы.

2) Номер работы и её название.

3) Цель работы.

4) Специальное оборудование.

5) Решение примеров.

6) Вывод.

7) Ответы на контрольные вопросы.

#### **7. Контрольные вопросы**

1. Дать определение уравнения с разделяющимися переменными первого порядка, однородного дифференциального уравнения первого порядка.
2. В какой последовательности решают дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения?
3. Привести примеры практической значимости дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными, однородных дифференциальных уравнений первого порядка в общетехнических и специальных дисциплинах.

#### **8. Литература:**

Математика: учеб. пособие В. П. Омельченко, Э. В. Курбатова, 2007(Среднее профессиональное образование).



**Практическая работа №6**  
**Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.**  
**Решение прикладных задач**

**1. Цель работы:**

- Научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка, применять дифференциальные уравнения первого порядка к решению прикладных задач.

**Студент должен знать:** определение линейного дифференциального уравнения первого порядка, алгоритм его решения, таблицу основных интегралов, алгоритм решения прикладных задач.

**Студент должен уметь:** решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка и применять их при решении прикладных задач.

**2. Основные теоретические положения**

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка  $y' = f(x; y)$  называется **линейным**, если его можно представить в виде

$y' + P(x)y = Q(x)$ , где  $P(x), Q(x)$  – заданные функции от  $x$  (в частности, постоянные величины).

**Алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка**

1. Определить вид линейного дифференциального уравнения первого порядка:

а)  $y' + P(x)y = Q(x)$ ;      б)  $y' = ky + b$ , где  $k$  и  $b$  - const.

2. Ввести подстановку  $y = u \cdot v$ :

2. Определить

значения  $k$  и  $b$ :

для а)  $\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ .

для б). Записать общее

решение

Данное уравнение примет вид

в

виде  $y = Ce^{kx} - \frac{b}{k}$ .

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + P(x)u \cdot v = Q(x).$$

3. Сгруппировать члены уравнения так, чтобы  $u$

вынести за скобки:  $v \frac{du}{dx} + u(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v) = Q(x)$ .

4) Подставляя значение  $v(x)$  в уравнение  $v \cdot \frac{du}{dx} = Q(x)$ ,

находим функцию  $u(x; C)$ .

5) Получим общее решение  $y = v(x) \cdot u(x; C)$ .

**Алгоритм решения прикладных задач**

1. Из переменных величин выделить функцию и аргумент, установит физический смысл функции, производной от неё.

2. На основании известных сведений из физики, механики, электротехники и других дисциплин, установить зависимость между функцией, её производной и аргументом, иными словами составить дифференциальное уравнение.

3. Определить, к какому типу относиться составленное уравнение.

4. Решить уравнение и найти его общее решение.

5. Если в задаче даны начальные условия, получить частное решение уравнения.

### Решение типовых примеров и задач

1. Найти частное решение уравнения:

$$xy' - y = x^3, \text{ если } y = \frac{1}{2} \text{ при } x = 1.$$

**Решение:**

$y' - \frac{y}{x} = x^2$ ;  $P(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $Q(x) = x^2$ . Данное уравнение линейное дифференциальное 1-го порядка.

- Положим:  $y = u \cdot v$ ,  $y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ .

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - \frac{uv}{x} = x^2, u \left( \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} \right) + v \cdot \frac{du}{dx} = x^2, \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0, \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x.$$

- Подставляя значение функции  $v$  в уравнение, найдём  $u(x; C)$ :

$$x \cdot \frac{du}{dx} = x^2, \frac{du}{dx} = x, du = x \cdot dx, \int du = \int x dx, u = \frac{x^2}{2} + C.$$

- Получим общее решение  $y = x \cdot \left( \frac{x^2}{2} + C \right)$ .

- Подставляя начальные условия, находим частное решение

$$\frac{1}{2} = 1 \left( \frac{1}{2} + C \right), C = 0, y = \frac{x^3}{2}.$$

2. Конденсатор, емкость которого  $Q$  включается в цепь с напряжением  $E$  и сопротивлением  $R$ . Определить заряд  $q(t)$  конденсатора в момент времени  $t$ , если в начальный момент времени он был равен нулю.

**Решение:**

- Если в момент времени  $t$  заряд конденсатора равен  $q(t)$ , то к этому моменту времени ток  $i = \frac{dq}{dt}$ , а электродвижущая сила  $E$  равна разности между напряжением цепи  $U$  и напряжением конденсатора  $\frac{q}{Q}$ , т.е.  $E = U - \frac{q}{Q}$ .

Согласно закону Ома  $i = \frac{E}{R}$ ; откуда

$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{Q}}{R}$ , или  $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{QR} = \frac{U}{R}$  – линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

- $q = u \cdot v$ , откуда  $\frac{dq}{dt} = u \cdot \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}$ .

- Подставляя значения  $q, \frac{dq}{dt}$  в линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, группируя члены, содержащие  $u$ , вынося его за скобки, получим  $v \cdot \frac{du}{dt} + u \left( \frac{dv}{dt} + \frac{v}{QR} \right) = \frac{U}{R}$ .

- Найдём  $v, \frac{dv}{dt} + \frac{v}{QR} = 0; \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{QR}, \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dt}{QR}, \ln|v| = -\frac{t}{QR}, v = e^{-\frac{t}{QR}}$ .

- Подставляя, функцию  $v$  в уравнение  $v \frac{du}{dt} = \frac{U}{R}$ , получим

$$e^{-\frac{t}{QR}} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{U}{R} \Leftrightarrow du = \frac{U}{R} e^{\frac{t}{QR}} dt, \int du = \int \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{t}{QR}} dt, u = \frac{U}{R} Q e^{\frac{t}{QR}} + C, u = Q U e^{\frac{t}{QR}} + C.$$

- Таким образом,  $q = u \cdot v = e^{-\frac{t}{QR}} (Q U e^{\frac{t}{QR}} + C) = Q U + C e^{-\frac{t}{QR}}$ .
- Найдём  $C$  из условия  $q = 0$  при  $t = 0, 0 = Q U + C e^0 \Leftrightarrow C = -Q U$ .
- Итак, в любой момент времени  $t$  заряд конденсатора определяется по формуле  $q = Q U - Q U e^{-\frac{t}{QR}} = Q U (1 - e^{-\frac{t}{QR}})$ .

**3. Специальное оборудование:** МК, таблицы «Основные формулы интегрирования», «Производная элементарных функций, правил дифференцирования», «Алгоритм решения прикладных задач».

**4. Рабочие задания:**

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите темы «Дифференциальные уравнения» ( конспект, гл. 2,2.2,2.2.3)
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить примеры.



**Задания с выбором ответа**  
**I- группа**

№ задания	Содержание заданий	Ответы
1	Найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2x$ .	$y = 1 + C \cdot e^{-x^2}$
2	Найти частное решение уравнения $y' - 2y + 3 = 0$ , если $y = 1$ при $x = 0$ .	$y = \frac{3 - e^{2x}}{2}$
3	Какие из следующих уравнений являются линейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка: а) $y'' - 3y = 5$ ; б) $y^2 - 3y' - 1 = 0$ ; в) $\frac{dy}{dx} - 3(x^3 + 1)y = \frac{1}{x}$ ; г) $\frac{dy}{dx} - y = 0$ ; д) $y^2 - yx + 1 = 0$ ?	?
4	Конденсатор, емкость которого $Q$ включается в цепь с напряжением $E$ и сопротивлением $R$ . . Определить заряд $q(t)$ конденсатора в момент времени $t$ , если в момент времени $t = 1c$ он был равен 2 Кл.	$q = QU + Ce^{-\frac{t}{QR}}, C = ?$

**II- группа**

<b>№ задания</b>	<b>Содержание заданий</b>	<b>Ответы</b>
<b>1</b>	Найти общее решение уравнения $(1 + x^2)y' - xy = 2x.$	$y = C\sqrt{1 + x^2} - 2$
<b>2</b>	Найти частное решение уравнения $\frac{dy}{dx} = y + 1. \quad y = 1, \text{ при } x = 0.$	$y = 2e^x - 1.$
<b>3</b>	Какие из следующих уравнений являются линейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка: а) $y'' - 3y = 5$ ; б) $y^2 - 3y' - 1 = 0$ ; в) $\frac{dy}{dx} - 3(x^3 + 1)y = \frac{1}{x}$ ; г) $\frac{dy}{dx} - y = 0$ ; д) $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3$ .	<b>?</b>
<b>4</b>	Конденсатор, емкость которого $Q$ включается в цепь с напряжением $E$ и сопротивлением $R$ . . Определить заряд $q(t)$ конденсатора в момент времени $t$ , если в момент времени $t = 2c$ он был равен 1 Кл.	$q = QU + Ce^{-\frac{t}{QR}}, C = ?$

### III-группа

№ задания	Содержание заданий	Ответы
1	Найти общее решение уравнения $\cos x dy + y \sin x dx = dx.$	$y = \sin x + C \cos x.$
2	Найти частное решение уравнения $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0, y = 1$ при $x = 0.$	$y = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}.$
3	Какие из следующих уравнений являются линейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка: а) $y'' - 3y = 5$ ; б) $y^2 - 3y' - 1 = 0$ ; в) $y' - 2y - 3 = 0$ ; г) $\frac{dy}{dx} - y = 0$ ; д) $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3.$	?
4	Конденсатор, емкость которого $Q$ включается в цепь с напряжением $E$ и сопротивлением $R$ . . Определить заряд $q(t)$ конденсатора в момент времени $t$ , если в момент времени $t = 0$ он был равен 1 Кл.	$q = QU + Ce^{-\frac{t}{QR}}, C = ?$

#### 5. Порядок выполнения практической работы:

- 1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.
- 2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.
- 3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.
- 4) Решите примеры.
- 5) Сделайте вывод.

#### 6. Содержание отчета студента:

- 1) Дата выполнения работы.
- 2) Номер работы и её название.
- 3) Цель работы.
- 4) Специальное оборудование.
- 5) Решение примеров.
- 6) Вывод.
- 7) Ответы на контрольные вопросы

#### 7. Контрольные вопросы

1. Дать определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

2. Привести примеры практической значимости линейных дифференциальных уравнений первого порядка в общетехнических и специальных дисциплинах.

**8. Литература:**

Математика: учебное пособие В.П. Омельченко, Курбатова -2007.-(Среднее профессиональное образование).

## Практическая работа №7

### Решение дифференциальных уравнений второго порядка. Решение прикладных задач

#### 1. Цель:

- Научиться решать неполные дифференциальные уравнения второго порядка, линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами;
- Научиться применять дифференциальные уравнения второго порядка для решения прикладных задач.

**Студент должен знать:** определения неполных дифференциальных уравнений второго порядка, линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

**Студент должен уметь:** решать неполные дифференциальные уравнения второго порядка, линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами применять их для решения прикладных задач.

#### 2. Основные теоретические положения

Определение 1. Простейшее уравнение второго порядка имеет вид

$y'' = f(x)$  или  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$ . Уравнение этого вида решается двукратным интегрированием.

#### Алгоритм решения неполного дифференциального уравнения второго порядка

1.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = f(x)$  полагаем  $\frac{dy}{dx} = p$ , тогда  $\frac{dp}{dx} = f(x)$  и уравнение примет вид  $dp = f(x)dx$

2. Интегрируем:  $\int dp = \int f(x)dx$ ,  $p = F(x) + C_1$

3. Так, как  $\frac{dy}{dx} = p$ , то  $\frac{dy}{dx} = F(x) + C_1$ ,  $dy = (F(x) + C_1)dx$

4. Интегрируем ещё раз, находим общее решение уравнения:  
 $y = \int F(x)dx + C_1 x + C_2$ .

Определение 1. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида  $\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$  или  $y'' + py' + qy = 0$ , где  $p, q$ -постоянные величины.

#### Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

6) Записать дифференциальное уравнение в виде

$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$  или  $y'' + py' + qy = 0$ , где  $p, q$ -постоянные величины.

7) Составить его характеристическое уравнение

$r^2 + r + q = 0$ , которое получается из уравнения заменой:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - r^2, \frac{dy}{dx} - r, y - 1$ .

8) Вычислить дискриминант  $D = p^2 - 4q$ .

а)  $D > 0$ ; следовательно, характеристическое уравнение имеет два разных действительных корня  $r_1$  и  $r_2$ . Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ .

б)  $D < 0$ ; следовательно, характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня  $r_1 = r_2 = r$ . Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

в)  $D < 0$ ; следовательно, характеристическое уравнение имеет комплексные корни  $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi$ .

Общее решение дифференциального уравнения выражается в виде

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin x).$$

### Решение типовых примеров и задач

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения:  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x$ .

Решение. Полагаем  $\frac{dy}{dx} = p$ , тогда

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \sin x, \frac{dp}{dx} = \sin x, dp = \sin x dx, \int dp = \int \sin x dx, p = -\cos x + C_1$$

Следовательно,  $\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1, dy = (-\cos x + C_1) dx, \int dy = \int (-\cos x + C_1) dx,$

$y = -\sin x + C_1 x + C_2$  - общее решение уравнения.

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения:  $y'' + y' + 9y = 0$

Решение. Составляем характеристическое уравнение и найдём его корни

$$r^2 + 6r + 9 = 0, D = 36 - 36 = 0, r_1 = \frac{-6}{2} = -3, y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x) \text{ - общее решение}$$

уравнения.

**Пример 3.** Найти частное решение уравнения:  $y'' + 2y' + 5y = 0$

,  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

Решение. 1) Составляем характеристическое уравнение и найдём его корни

$$r^2 + 2r + 5 = 0, D = 4 - 20 = -16 < 0, r_1 = -1 + 2i, r_2 = -1 - 2i. \text{ Общим решением}$$

является функция  $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ . 2) Дифференцируя общее решение, найдём  $y'$ .

$$y' = [e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)]' = (e^{-x})' (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)' = -e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x} (-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) = e^{-x} (-C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) = e^{-x} (-C_1 \cos 2x - (2C_1 + C_2) \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - C_2 \sin 2x).$$

3)  $C_1, C_2$  находим из начальных условий:

$$0 = e^{-0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0),$$

$$1 = e^{-0}((2C_2 - C_1) \cos 0 - (2C_1 + C_2) \sin 0), C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}. \quad y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x. \text{ -частное}$$

решение.

**Пример 3.** Ускорение прямолинейного движения материальной точки задано уравнением  $a = 6t - 4$ . Найти уравнение движения точки, если

$$t = 2c, s' = 6 \frac{M}{c}.$$

Решение. Так как  $s''(t) = a$ , имеем  $\frac{d^2 s}{dt^2} = 6t - 4$ .

- Решаем неполное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d(\frac{ds}{dt})}{dt} = 6t - 4, \frac{ds}{dt} = p, \frac{dp}{dt} = 6t - 4, dp = (6t - 4)dt, \int dp = \int (6t - 4)dt, p = 3t^2 - 4t + C_1, ds = (3t^2 - 4t + C_1)dt, \int ds = \int (3t^2 - 4t + C_1)dt, s = t^3 - 2t^2 + C_1 t + C_2 \text{ -общее решение уравнения.}$$

- Находим  $C_1, C_2$  с помощью начальных условий.

- Дифференцируя общее решение, имеем  $s'(t) = (t^3 - 2t + C_1 t + C_2) = 3t^2 - 4t + C_1$

$$\begin{cases} 5 = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2C_1 + C_2, & 5 = 8 - 8 + C_1 + C_2, & C_1 = 2, & C_2 = 5 - 4 = 1 \\ 6 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C_1; & \Leftrightarrow 6 = 12 - 8 + C_1; \end{cases}$$

Итак, искомым решением является функция  $s = t^3 - 2t^2 + 2t + 1$ .

**3. Специальное оборудование:** МК, таблицы «Производная элементарных функций, правил дифференцирования», «Основные формулы интегрирования», «Алгоритм решения прикладных задач на составление дифференциальных уравнений».

#### 4. Рабочие задания:

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите темы «Дифференциальные уравнения» ( конспект, гл. 2,2.2,2.2.3)
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить примеры

### Задания с выбором ответа Вариант - 1

	Содержание вопросов	Ответы
--	---------------------	--------

№ задания		1	2	3	4	5
1	Указать, какие из уравнений: а) $y'' = 2$ ; б) $d^2y = 3x dx^2$ ; в) $y'' + 4y' + 8y = 0$ ; г) $y' - \frac{y}{\sin x} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ ; д) $y' - \frac{2}{xy} = e^x x^2$ ; е) $y'' + 4y' + 7y = 0$ - являются линейными однородными дифференциальными второго порядка с постоянными коэффициентами?	а), в)	а), г),	в), д)	в), е)	Правильного ответа нет
2	Указать, какие из функций: а) $y = e^{-3x} + 2e^{2x}$ ; б) $s = 2t^3 - t^2 + 2t + 5$ ; в) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ ; г) $y = -\sin x + C_1 x + C_2$ - являются общим решение уравнения $y'' + 2y' + 8y = 0$ . ?	а), в)	б), г)	а), в), г)	в)	
3	Указать, какие из функций: а) $y = -\sin x + C_1 x + C_2$ ; б) $y = \frac{1}{2} e^x + C_1$ ; в) $y = \sin x + C \cos x$ ; г) $s = C \cos x$ - являются общим решением уравнения $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x$ ?	а), г)	в), б)	а)	б)	
4	Указать какие из функций : а) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin x)$ ; б) $y = e^{-3x}(2 + 7x)$ ; в) $y = e^{-x}$ ; г) $y = e^{-3x} + 2$ - являются частным решением уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0, x = 0, y = 2, y' = 1$ ?	а), б)	б)	в)	г)	



5	Ускорение прямолинейного движения материальной точки задано уравнением $a = 12t + 4$ . Найти уравнение движения, если $s=1\text{м}$ , $v=4\frac{\text{м}}{\text{с}}$ , $t=1\text{с}$ .	$s = 2t^3 + 2t^2 + 6t - 9$	$S = 2t^3 + t^2 - t$	$S = \sin t + C \cos t$	$S = 2t^3 + 3$	
---	---	----------------------------	----------------------	-------------------------	----------------	--

### Вариант- 2

№ зада ния	Содержание вопросов	Ответы				
		1	2	3	4	5
1	Указать, какие из уравнений: а) $y' = 2x$ ; б) $y'' - 8x = 0$ ; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$ ; г) $y'' - y' - 6y = 0$ ; д) $y'' - 9y = 0$ – являются линейными однородными дифференциальными второго порядка с постоянными коэффициентами?	а)	в)	в), г), д)	в), г)	
2	Указать, какие из функций: а) $y + xy' = 0$ ; б) $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ; в) $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ; г) $y = e^x (C_1 \cos x + 2)$ – являются общим решением уравнения $y = -2y' + 2y$ ?	б)	в)	в), а)	а), б)	
3	Указать, какие из функций: $y = \sin x + C$ ; б) $y = 2e^{3x+1} + C$ ; в) $y = x^2 + 4x - 10$ ; г) $y = Ce$ – являются общим решением уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ?	а)	б), в)	в), г)	г)	

4	<p>Указать, какие из функций: а) <math>y = e^{-x} + 2e^{-2x}</math>; б) <math>y = e^{3x}</math>; в) <math>y = e^{4x} + 3e^{-x}</math> – являются частным решением уравнения <math>y'' = -3y' - 2y, x = 0, y = -1, y = 3</math>.</p>	а)	б)	а), б)	в)	
---	---	----	----	-----------	----	--

5	<p>Ускорение свободно падающего тела удовлетворяет уравнению <math>\frac{d^2s}{dt^2} = g (g = 9,8 \frac{м}{с^2})</math>. Найдите закон движения тела, если <math>s = s_0</math> <math>\frac{ds}{dt} = v_0</math> в момент времени <math>t=0</math>.</p>	$S = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$	$S = \frac{1}{4}gt^2 + v_0t + s_0$	$S = \frac{1}{3}gt^3$	$S = gt^2 + 3$	Правильного ответа нет	Правильного ответа нет
---	---	------------------------------------	------------------------------------	-----------------------	----------------	------------------------	------------------------

### Вариант-3

№задания	Содержание вопросов	Ответы				
		1	2	3	4	5
1	<p>Указать, какие из уравнений: а) <math>y'' - 2y' + 3y = 2</math>; б) <math>y'' = 2x</math>; в) <math>y'' - 2y' - 8y = 0</math>; в) <math>y' - 2\frac{y}{x} + 1 = (x+1)^3</math>; д) <math>x^2y' + y^2 = xyu' -</math> являются линейными однородными дифференциальными второго порядка с постоянными коэффициентами?</p>	а)	б), в)	а), д)	г), в)	Правильного ответа нет
2	<p>Указать какие из функций: а) <math>y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)</math>; б) <math>y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}</math>; в) <math>y = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)</math>; г) <math>y = C \cos x + C_2 \sin x</math> – являются общим решением уравнения <math>y'' + 2y' - 2y = 0</math>?</p>	а), г)	б)	а)	г), в)	
3	<p>Указать, какие из функций а) <math>y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}</math>; б) <math>y = e^{-4x} + 5x e^{-4x}</math>; в) <math>y = C_1 + C_2 x e^{5x}</math>; г) <math>y = 2x^2 - C_1 x + C_2</math> – являются решением уравнения <math>\frac{d^2s}{dt^2} - 6t</math>?</p>	а), в)	г)	б)	г), б)	

4	Указать, какие из функций: а) $s = e^x (C \cos 2t + \sin 2t)$ ; б) $y = e^{-3x}$ ; в) $s = 4t^3 - 2t^2 + 4$ ; г) $y = 2e^{-x}$ – являются частным решением уравнения $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 5s = 0$ , если при $t=0$ $s=1$ , $s' = 1$ ?	а), б)	а)	в)	г)	
5	Ускорение прямолинейного движения материальной точки задано уравнением $a = 6t - 4$ . Найдите уравнение движения, если $t=2$ с? $V=6 \frac{м}{с}$ , $s=5$ м.	$S=t^3 - t^2 + 1$	$S=t^3 - 2t^2 - 2t + 1$	$S=\cos t + 2\sin t$	$y=e^x(\cos x + 3\sin x)$	

#### Вариант-4

№ задания	Содержание вопросов	Ответы				
		1	2	3	4	5
1	Указать, какие из уравнений: а) $y' - 3x = 4$ ; б) $y^2 - 2x + y = 5$ ; в) $y' = \frac{y}{x} - 1$ ; г) $x^2 y' = (x - y)y'$ ; д) $y'' = 5$ ; е) $y'' + 4y' + 7y = 0$ – являются линейными однородными дифференциальными второго порядка с постоянными коэффициентами?	а), б)	в), д)	е)	б), е)	

2	Указать, какие из функций: а) $y = x^3 + x + C$ ; б) $y = \frac{x^3}{3} + x + C$ ; в) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ ; г) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ – являются общим решением уравнения $y'' - y' - 6y = 0$ ?	а), б)	а), в)	в)	г)	Правильного ответа нет
3	Указать, какие из функций: а) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ ; б) $y = -\cos x + \sin x$ ; в) $y = C_1 e^x$ ; г) $y = e^x -$ являются решением уравнения $\frac{d^2 s}{dt^2} = 18t + 2$ ?	а)	б), в)	г)	а), г)	
4	Указать, какие из функций: а) $y = 2e^{3x}$ ; б) $y = 2e^{3x} + e^{-x}$ ; в) $y = e^{-2x}$ ; г) $y = 3e -$ являются частным решением уравнения $y'' - 9y = 0$ , если при $x=0, y=2, y' = 6$ ?	а)	б)	в)	г)	
5	Ускорение прямолинейного движения материальной точки задано уравнением $a = 6t - 5$ . Найти уравнение движения точки, если $t=1$ с? $s=4$ м, $s' = 5 \frac{м}{с}$ .	$S=t^3-2t-2t+1$	$S=t^2-t+1$	$S=t^4-t^3+t^2+2t+2$	$S=t^2+5$	

## 5. Порядок выполнения практической работы:

1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.

2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.

3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.

4) Решите примеры.

5) Сделайте вывод.

## 6. Содержание отчета студента:

1) Дата выполнения работы.

2) Номер работы и её название.

3) Цель работы.

4) Специальное оборудование.

5) Решение примеров.

6) Вывод.

7) Ответы на контрольные вопросы

### 7. Контрольные вопросы

1. Какие уравнения называются линейными однородными дифференциальными второго порядка с постоянными коэффициентами, неполными дифференциальными второго порядка?
2. В какой последовательности решают линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка?
3. Привести примеры практической значимости дифференциальных уравнений второго порядка в общетехнических и специальных дисциплинах.

### 8. Литература:

Математика: учебное пособие В.П. Омельченко, Курбатова -2007.-(Среднее профессиональное образование).

## Практическая работа №8 Разложение функций в ряд Маклорена

### 1. Цель работы:

- Научиться разлагать функции в степенные ряды.

**Студент должен знать:** определение степенных рядов, области сходимости, радиуса сходимости, промежутка сходимости степенного ряда. Определение ряда Маклорена.

**Студент должен уметь:** представлять в ряд Маклорена элементарные функции, находить их промежутки сходимости.

### 2. Основные теоретические положения

Рядом Тейлора для функции  $f(x)$  называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \dots$$

Если  $a=0$ , то получим частный случай ряда Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots, \text{ который называется рядом}$$

Маклорена.

Для разложения функции  $f(x)$  в ряд Маклорена нужно:

- 1) вычислить значения функции и её последовательных производных в точке  $x=0$ , т.е.  $f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0)$ ;
- 2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и её последовательных производных в формулу;

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots,$$

- 3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

( $a_n \neq 0, n=1,2,3,\dots$ ), радиус сходимости ряда  $R$  равен этому пределу (если он существует) и ряд сходится при  $|x| < R$ , т.е. в промежутке  $-R < x < R$ , который

называется промежутком (интервалом) сходимости. Если предел  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  равен нулю ( $R = 0$ ), то ряд сходится в единственной точке  $x = 0$ . На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться. Сходимость ряда при  $x = -R$  и  $x = R$  исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

### Решение типовых примеров

**Пример 1.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = e^x$ .

**Решение.** Вычислим значения функции и её производных при  $x = 0$ ; имеем  $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x; f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ . Оставив, эти значения в формулу

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$ , получим разложение функции

$f(x) = e^x$  в ряд Маклорена:  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ . Этот ряд называется

экспоненциальным рядом. Промежуток сходимости найдём по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| :$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}; \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| = \infty, \text{ т.е.}$$

$-\infty < x < \infty$ . Полученный ряд сходится к функции  $f(x) = e^x$  при любых значениях  $x$ ,

Так как в любом промежутке функция  $f(x) = e^x$  и её производные по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом.

**3. Специальное оборудование:** МК, таблица «Производная элементарных функций, правил дифференцирования».

### 4. Рабочие задания:

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите темы «Числовые ряды» (гл. 2; 2.4, конспект).
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить примеры

### Задания

#### Вариант-I

Разложить в ряд Маклорена функцию

1.  $f(x) = \sin x$ ;

2.  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ;

3.  $f(x) = \cos^2 x$ .

#### Вариант-II



Разложить в ряд Маклорена функцию

1.  $f(x) = \cos x$ ;
2.  $f(x) = \ln(1 + x)$ ;
3.  $f(x) = \arctan x$ .

### Вариант-III

Разложить в ряд Маклорена функцию

1.  $f(x) = \frac{2}{3 - x}$ ;
2.  $f(x) = \ln(x - 4)$ ;
3.  $f(x) = 3^x$ .

### Вариант-IV

Разложить в ряд Маклорена функцию

1.  $f(x) = \arcsin x$ ;
2.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .
3.  $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ .

### 5.Порядок выполнения практической работы:

- 1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.
- 2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.
- 3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.
- 4) Решите примеры.
- 5) Сделайте вывод.

### 6. Содержание отчета студента:

- 1) Дата выполнения работы.
- 2) Номер работы и её название.
- 3) Цель работы.
- 4) Специальное оборудование.
- 5) Решение примеров.
- 6) Вывод.
- 7) Ответы на контрольные вопросы

### 7. Контрольные вопросы

1. Дать определение ряда Тейлора (Маклорена).
2. Назвать алгоритм разложения элементарных функций в ряд Маклорена.

### 8.Литература:

Математика: учебное пособие В.П. Омельченко, Курбатова -2007.-(Среднее профессиональное образование).

## Практическая работа №9

### Решение простейших задач на определение вероятности

#### 1. Цель работы:

- Научиться решать простейшие задачи на вычисление вероятности.

#### Студент должен знать:

- случайные события;
- классическое определение вероятности;
- теоремы сложения и умножения вероятностей;
- формулу полной вероятности, формулу Байеса;
- формулу Бернулли.

#### Студент должен уметь:

- решать простейшие задачи на определение вероятности.

#### 2. Основные теоретические положения

##### Алгоритм решения задач на подсчет вероятности на множестве равновероятных исходов:

1. Выяснить по содержанию задачи, в чем конкретно состоит испытание.
2. Выяснить, являются ли элементарные события равновероятными (равновероятными).
3. Подсчитать число  $n$  всех возможных событий.
4. Подсчитать число  $m$  всех событий, благоприятствующих появлению события  $B$ .
5. Вычислить искомую вероятность  $P(B) = m / n$ .

##### Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:  
 $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

##### Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ .

##### Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

##### Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:  $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ .

Вероятность наступления события  $A$ , вычисленная в предположении, что событие  $B$  уже произошло, называется **условной вероятностью** события  $A$  при условии  $B$  и обозначается  $P_B(A)$  или  $P(\frac{A}{B})$ .

Пусть события (гипотезы)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них, например  $B_i$ , событие  $A$

может наступить с некоторой условной вероятностью  $P_{B_i}(A)$ . Тогда вероятность наступления события А равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A), \text{ где}$$

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1. \text{ - формула полной вероятности.}$$

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез)  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , которые образуют полную группу событий. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса.

### Формула Байеса

$$P_A(B_i) = \frac{P_A(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \text{ где } P_A(B_i) \text{ - вероятность каждой из гипотез}$$

после испытания, в результате которого наступило событие А:  $P_{B_i}(A)$  - условная вероятность события А после наступления события  $B_i$ , а  $P(A)$  находится по формуле полной вероятности.

Вероятность того, что в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна  $p$ , где  $(0 < p < 1)$ , событие А наступит ровно  $k$  раз (безразлично, в какой последовательности),

находится по **формуле Бернулли**:  $P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$ , где  $q = 1 - p$ .

### Решение типовых задач

1. В лотереи из 1000 билетов имеются 200 выигрышных, вынимают наугад 1 билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть  $n=1000$ . Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет  $m=200$ . Получаем  $P(A)=200/1000=1/5=0.2$

2. В партии из 18 деталей находится 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей 2 окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов  $n$  равно числу сочетаний из 18 по 5, т.е.  $C_{18}^5 = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568$ . Подсчитаем число исходов  $m$  благоприятствующих событию А. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки 2-х бракованных деталей из 4-х имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4-х по 2:  $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ . Число способов выборки 3-х качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно  $C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364$ . Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных

деталей, поэтому общее число комбинаций  $m$  составляет

$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184$ . Искомая вероятность события  $A$  равно отношению числа исходов  $m$ , благоприятствующих этому событию, к числу  $n$  всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = 2184/8568 = 0.255.$$

3. В ящике в случайном порядке расположены 20 деталей, причём пять из них стандартные. Рабочий берёт наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие  $A$ ).

Решение. I-способ.  $B$  - одна деталь стандартная, две нестандартные;  $C$  - две детали стандартные, одна нестандартная и  $D$  - три детали стандартные.  $A = B + C + D$ . По теореме сложения имеем  $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$ .

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{35}{76},$$

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{15}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{38},$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}. P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228} = 0,601.$$

II способ. События  $A$  (хотя бы одна из трёх взятых деталей оказалась стандартной) и  $\bar{A}$  (ни одна из взятых деталей не оказалась стандартной) являются противоположными:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, P(A) = 1 - P(\bar{A}). P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{91}{228}.$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{137}{228} = 0,601.$$

4. В одной урне находятся 4 белых и 8 чёрных шаров, в другой - 3 белых и 9 чёрных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть  $A$  - появление белого шара из первой урны, а  $B$  - появление белого шара из второй урны. События  $A$  и  $B$  независимы.

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}. \text{ По теореме умножения вероятностей}$$

$$\text{независимых событий получим } P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12} = 0,083.$$

5. В первом ящике имеются 8 белых и 6 чёрных шаров, а во втором - 10 белых и 4 чёрных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар - чёрный. Найти вероятность того, что был выбран первый шар.

Решение.  $B_1$  - был выбран первый ящик;  $B_2$  - был выбран второй ящик;  $A$  - при произведении двух последовательных испытаний выбора ящика и

выбора шара был вынут чёрный шар.  $P(B_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B_2) = \frac{1}{2}$ .

Вероятность извлечения чёрного шара после того, как выбран первый ящик, составляет  $P_{B_1}(A) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ . Вероятность извлечения чёрного шара

после того, как выбран второй ящик, равна  $P_{B_2}(A) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ . По формуле полной вероятности находим вероятность того, что вынутый шар оказался чёрным.  $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{14}$ .

Искомая вероятность того, что чёрный шар был вынут из первого ящика,

вычисляется по формуле Байеса:  $P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{7}\right)}{\frac{5}{14}} = \frac{3}{5} = 0,6$ .

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет  $p=0,8$ . Найти вероятность четырёх попаданий при шести выстрелах.

Решение.  $n=6, k=4, p=0,8, q=0,2$ . По формуле Бернулли находим

$$p_6(4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot (0,8)^4 \cdot (0,2)^4 \cdot (0,2)^{6-4} = \frac{6!}{4!2!} \cdot (0,8)^4 (0,2)^2 = 0,246.$$

### 3. Специальное оборудование: МК

#### 4. Рабочие задания:

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите тему «Элементы теории вероятностей» (гл. 4; 4.1.1-4.1.6, конспект).
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить задачи.

### Задания

#### Обязательная часть

##### Вариант-I

1. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 чёрных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется чёрным.
2. В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролёр взял наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей оказалась стандартной.
3. В одной урне находятся 5 белых и 8 чёрных шаров, в другой 6 белых и 9 чёрных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
4. Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадает: а) 4; б) 5; в) чётное число очков; г) число очков, большее 4; д) число очков, не кратное трём.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

### Вариант-II

1. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?
2. Из слова НАУГАД выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что буква А? Какова вероятность того, что это гласная?
3. В урне лежат 10 белых и 11 рыжих шаров. Случайным образом достают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди этих шаров есть, по крайней мере, 4 белых шара?
4. В урне лежат 10 белых и 11 рыжих шаров. Случайным образом достают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди этих шаров есть, по крайней мере, 4 белых шара?
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.

### Вариант-III

1. Из 16 собранных велосипедов 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?
2. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что выпадут два «герба».
3. В ящике в случайном порядке расположены 30 деталей, причём пять из них стандартные. Рабочий берёт наудачу две детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие А).
4. В одной урне находятся 6 белых и 10 чёрных шаров, в другой 4 белых и 8 чёрных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

### Дополнительная часть

1. На склад поступили детали с трёх станков. На первом станке изготовлено 20% деталей от их общего количества, на втором-25% и на третьем 15%, причём на первом станке было изготовлено 80% деталей первого сорта, на втором-70% и на третьем-60%. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?
2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,7. Найдите вероятность двух попаданий при четырёх выстрелах.
3. В первом ящике имеются 9 белых и 5 чёрных шаров, а во втором- 12 белых и 5 чёрных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар - чёрный. Найти вероятность того, что был выбран первый шар.
4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найдите вероятность двух попаданий при четырёх выстрелах.
5. На склад поступили детали с трёх станков. На первом станке изготовлено 20% деталей от их общего количества, на втором-25% и на третьем 15%, причём на первом станке было изготовлено 80% деталей первого сорта, на втором-70% и на третьем-60%. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,7. Найдите вероятность двух попаданий при четырёх выстрелах.

**5. Порядок выполнения практической работы:**

1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.

2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.

3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.

4) Решите примеры.

5) Сделайте вывод.

**6. Содержание отчета студента:**

1) Дата выполнения работы.

2) Номер работы и её название.

3) Цель работы.

4) Специальное оборудование.

5) Решение примеров.

6) Вывод.

7) Ответы на контрольные вопросы

**7. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение классической вероятности.

2. Сформируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.

3. Привести примеры практической значимости теорем сложения и умножения вероятностей.

**8. Литература:** Математика: учебное пособие В.П. Омельченко, Курбатова -2007.-(Среднее профессиональное образование).

## Практическая работа №10

### Нахождение функции распределения случайной величины

#### 1. Цель работы:

- Научится решать простейшие задачи на нахождение закона распределения случайной величины.

#### Студент должен знать:

- понятие о дискретной случайной величине и законе её распределения;
- определения и формулы математического ожидания и дисперсии.

#### Студент должен уметь:

- решать простейшие задачи на нахождение функции распределения, математического ожидания и дисперсии случайной величины.

#### 2. Основные теоретические положения

**Случайной** называют **величину X**, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

**Дискретной** называют такую **случайную величину X**, которая принимает счётное множество значений, т.е. такое множество, элементы которого можно подсчитать.

**Распределением (законом) случайной величины X** называется всякое соотношение между возможными значениями случайной величины  $x_i$  и соответствующими им вероятностями  $p_i$ .

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

**Математическим ожиданием  $M(x)$  дискретной случайной величины X** называется сумма произведений всех её возможных значений  $x_i$

на их вероятности  $p_i$ :  $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ .

**Дисперсия** характеризует **рассеяние (отклонение) случайной величины** относительно математического ожидания.

$$D(X) = M(X - M(X))^2, D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

$\sigma(\text{сигма}) = \sqrt{D(X)}$  – среднее квадратическое отклонение (размах колебаний случайной величины около математического ожидания).

#### Решение типовых задач

1. По мишени производится три выстрела, причём вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти закон распределения случайной величины  $x_i$ -числа попаданий в мишень.

Решение. Случайная величина  $x_i$  принимать значения 0,1,2,3. По формуле Я. Бернулли легко вычисляются вероятности:  $p_1=0,008$ ,  $p_2=0,096$ ,  $p_3=0,384$ ,  $p_4=0,512$ . Напишем закон распределения случайной величины X

$x_i$	0	1	2	3
$p_i$	0,008	0,096	0,384	0,512



2. Дискретная случайная величина распределена по закону:

$x_i$	-1	0	1	2
$p_i$	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ .

Решение.

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9, \quad M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 2,1.$$

$$\text{Имеем: } D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2,1 - 0,81 = 1,29.$$

### 3. Специальное оборудование: МК

#### 4. Рабочие задания:

- 1) Самостоятельно изучите методические рекомендации по проведению практической работы.
- 2) Повторите тему «Случайная величина» ( конспект, гл. 4,2. 4.2.1-4.2.2.)
- 3) Подготовьте ответы на контрольные вопросы.
- 4) Решить задачи.

### Задания

#### Вариант- I

1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 500 руб. и десять выигрышей по 100 руб. Найти закон распределения случайной величины  $X$ -стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.
2. Дискретная случайная величина  $X$  задаётся законом. Чему равна вероятность  $p_4 = P(X=0,8)$ ? Построить многоугольник распределения.

$x_i$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$p_i$	0,1	0,2	0,4	$p_4$	0,1

3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, зная закон его распределения. Построить многоугольник распределения.

$x_i$	0,1	2	10	20
$p_i$	0,4	0,2	0,15	0,25

## Вариант-II

1. По мишени производится четыре выстрела, причём вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти закон распределения случайной величины  $x_i$ -числа попаданий в мишень.
2. Дискретная случайная величина  $X$  задаётся законом. Чему равна вероятность  $p_2=P(X=3)$ ? Построить многоугольник распределения.

$x_i$	2	3	10
$p_i$	0,1	$P_2$	0,5

3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, зная закон его распределения. Построить многоугольник распределения.

$x_i$	-1	1	2	3
$p_i$	0,48	0,01	0,09	0,42

### 5.Порядок выполнения практической работы:

- 1) Предварительно повторите теоретический материал по учебнику или конспекту лекций.
- 2) Ознакомьтесь с содержанием практической работы.
- 3) Обратите внимание на оформление и решение типовых примеров.
- 4) Решите примеры.
- 5) Сделайте вывод.

### 6. Содержание отчета студента:

- 1) Дата выполнения работы.
- 2) Номер работы и её название.
- 3) Цель работы.
- 4) Специальное оборудование.
- 5) Решение примеров.
- 6) Вывод.
- 7) Ответы на контрольные вопросы

### 7. Контрольные вопросы

1. Дать определение дискретной случайной величины, распределения (закона) случайной величины, математического ожидания  $M(X)$  дискретной случайной величины  $X$ , дисперсии (отклонения) случайной величины.
2. Назвать формулу дисперсии случайной величины.
3. Привести примеры практической значимости функции распределения случайной величины.

### 8.Литература:

Математика: учебное пособие В.П. Омельченко, Курбатова -2007.-(Среднее профессиональное образование).

## Приложение

## Правила дифференцирования

$$7) (C)' = 0;$$

$$8) [Cf(x)]' = Cf'(x);$$

$$9) [U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x);$$

$$10) [U(x) \cdot V(x)]' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x);$$

$$11) \left[ \frac{U(x)}{V(x)} \right]' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)};$$

$$12) f'(x) = f'(U) \cdot U'(x) \quad \text{и л и} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad - \quad \text{производная сложной функции } U(x) - \text{промежуточная функция}$$

## Производные основных элементарных функций

$$14) (x^a)' = ax^{a-1};$$

$$15) (a^x)' = a^x \ln a, a > 0;$$

$$16) (e^x)' = e^x;$$

$$17) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; a \neq 1;$$

$$18) (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$19) (\sin x)' = \cos x;$$

$$20) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$21) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$22) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$23) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$24) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$25) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$26) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

## Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

### **Алгоритм решения прикладных задач на составление дифференциальных уравнений**

1. Из переменных величин выделить функцию и аргумент, установить физический смысл функции, производной от неё.
2. На основании известных сведений из физики, механики, электротехники и других дисциплин установить зависимость между функцией, её производной и аргументом, иными словами, составить дифференциальное уравнение.
3. Определить к какому типу относится составленное уравнение.
4. Решить уравнений и найти его общее решение.
5. Если в задаче даны начальные условия, получить частное решение уравнения.