

**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя
общеобразовательная школа №14 пос. Серебряный Бор»**

**Авторская программа
курса по математике
«Уравнения в целых числах»**

(для учащихся 10-11 классов)

**Разработала:
учитель математики
МБОУ СОШ № 14
Яковлева Т.А.**

2017 – 2018 учебный год

1.Пояснительная записка.

Данная программа предлагается для подготовки к олимпиаде по математике учащихся 10-11 классов.

Программа «Уравнения в целых числах» предлагает изучение тех вопросов алгебры, которые не входят в школьный курс алгебры, необходимы для решения сложных заданий с одарёнными учащимися.

Общеобразовательная школа по многим причинам не может научить своих учеников решать сложные олимпиадные задачи. Это очень трудный материал, требующий большое количество времени, кроме того, прежде чем приступить к решению подобных заданий учащийся должен в совершенстве владеть общим курсом алгебры, а это посильно только одаренным учащимся. Поэтому цель курса состоит в том, чтобы попытаться научить учащихся самостоятельно решать сложные задания и прочно усвоить различные методы, применяющиеся в процессе их решения.

Данный курс должен дать учащимся материалы для рассуждений, выявлять наиболее одаренных и подготовленных учащихся в области математики.

Предлагаемые математические задания помогут учащимся расширить математический багаж, полученный на уроках, развивать умения и навыки, ясно, связно и последовательно излагать свои мысли по теоретическим вопросам, практического решения уравнений, задач, приведения доказательств по сложным и трудным отделам элементарной математики, данные задания отличаются и сложностью, и новизной.

Подготовка к олимпиадам является хорошим стимулом к сдаче ЕГЭ, и поддерживает серьёзный интерес к учёбе и дополнительным занятиям.

Задания математических олимпиад являются, по сути, маленькими научными проблемами, поэтому учащиеся должны логически мыслить и уметь самостоятельно выводить некоторые научные утверждения.

Цель курса:

- создание условий для самореализации учащихся, расширение математических знаний по алгебре;
- развитие математических интеллектуальных способностей, отбор одарённых и талантливых учащихся;
- приобщить учащихся работать со справочной и дополнительной литературой.

Задачи курса:

- психологическая готовность учащихся к выполнению нестандартных заданий, отказ от стереотипных подходов;
- выявлять логические приёмы мышления, способствовать их осмыслению, развитию образного и ассоциативного мышления;
- Выявлять математическую одарённость, математическую грамотность учащихся, то есть с использованием математических терминов записывать решение задач.

2.Требования к уровню усвоения курса.

- свободно оперировать аппаратом алгебры при решении задач, олимпиадного характера;
- умение учащихся сконцентрироваться на выполнение нескольких заданий за определённое время;
- умение грамотно записывать решения заданий, используя математические понятия и термины.

3.Учебно-тематический план.

№	Наименование тем курса	Всего часов	В том числе			Форма контроля
			лекции	практика	семинар	
1	Решение уравнений в целых числах методом разложения на	3ч	1ч	1ч	1ч	

	множители					
2	Решение уравнений в целых числах через выделение целой части	3ч	1ч	1ч	1ч	Тест 1
3	Преобразование левой части уравнения в сумму неотрицательных слагаемых	2ч	1ч	1ч		
4	Решение уравнений в целых числах с использованием неотрицательности дискриминанта	3ч	1ч	1ч	1ч	
5	Решение уравнений в целых числах через сравнение остатков	3ч	1ч	1ч	1ч	Тест 2
	Итого:	17ч	6ч	6ч	4ч	

УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

В данном разделе представлены методы решения уравнений в целых числах. Такие задачи имеют олимпиадный характер и относятся к заданиям высокого уровня сложности.

Решить уравнение в целых числах – это значит, что необходимо найти такие целые значения неизвестных, при подстановке которых в исходное уравнение получается верное равенство.

1. Решение уравнений в целых числах

методом разложения на множители

Пример 1. Решите уравнение в целых числах $y^2 - xy - 2x^2 - 13 = 0$.

Ответ: (-4; 5) (4; 9) (4; -5) (-4; 9).

Решение. Перенесем 13 в правую часть, а выражение в левой части разложим на множители

$$y^2 - xy - 2x^2 - 13 = 0, \quad y^2 - xy - x^2 - x^2 - 13 = 0, \quad y^2 - x^2 - xy - x^2 = 13, \quad (y^2 - x^2) - (xy + x^2) = 13, \\ (y - x)(y + x) - x(y + x) = 13, \quad (x + y)(y - 2x) = 13.$$

Так как x и y должны быть целыми числами, то $x+y$ и $y-2x$ также должны быть целыми, а также и их произведение тоже должно быть целым. Это возможно при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - 2x = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ y - 2x = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 13 \\ y - 2x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -13 \\ y - 2x = -1 \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем целые решения исходного уравнения:

(-4; 5) (4; 9) (4; -5) (-4; 9).

Пример 2. Решить уравнение в целых числах $y^2 - x^2 + 3 = 0$.

Ответ: $(-2; -1), (2; 1), (-2; 1), (2; -1)$.

Решение. Перенесем 3 в правую часть, а выражение в левой части разложим на множители $y^2 - x^2 = -3$, $(y - x)(y + x) = -3$.

Так как x и y должны быть целыми числами, то $y-x$ и $y+x$ также должны быть целыми, а также и их произведение тоже должно быть целым. Это возможно при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = -3 \end{cases} \begin{cases} y - x = -1 \\ y + x = 3 \end{cases} \begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = -1 \end{cases} \begin{cases} y - x = -3 \\ y + x = 1 \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем целые решения исходного уравнения:

$(-2; -1), (2; 1), (-2; 1), (2; -1)$.

Пример 3. Решите уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$ в целых числах.

Ответ: $(1;5); (-1;-9); (7;-97); (-7;-99)$.

Решение. Приведём данное уравнение к виду $x(2x^2 + y) = 7$. Так как $7 = 1 \cdot 7 + 7 \cdot 1 = -1 \cdot (-7) = -7 \cdot (-1)$, то рассмотрим четыре системы

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + y = 7 \end{cases} & 2) \begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 + y = -7 \end{cases} & 4) \begin{cases} x = -7 \\ 2x^2 + y = -1 \end{cases} \end{array}$$

Из каждой системы получаем решения.

Отметим, что не всегда уравнение имеет решения в целых числах. Приведем такой пример.

Пример 4. Решить уравнение в целых числах $x^2 - y^2 = 14$.

Ответ: нет решений.

Решение. Разложим на множители $(x - y)(x + y) = 14$, тогда имеем

$$\begin{array}{llll} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 14 \end{cases} & \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -14 \end{cases} & \begin{cases} x - y = 14 \\ x + y = 1 \end{cases} & \begin{cases} x - y = -14 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} & \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = -7 \end{cases} & \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} & \begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = -2 \end{cases} \end{array}$$

Ни одна из систем не имеет решений в целых числах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение в целых числах $4y^2 - x^2 + 5 = 0$
2. Решить уравнение в целых числах $x^2 + 2x - y^2 - 2 = 0$
3. Решить уравнение в целых числах $x^2 + 2x + 2(x + 1)y - 3y^2 + 4 = 0$.

2. Решение уравнений в целых числах через выделение целой части

Пример 1. Решите уравнение в целых числах $x^2 - xy - y - 4 = 0$.

Ответ: $(-4; 4), (2; 0), (-2; 0), (0; -4)$

Решение. Перенесем все слагаемые, не содержащие y , в правую часть уравнения $-xy - y = -x^2 + 4$. Выполним преобразования и выразим y через x .

$xy + y = x^2 - 4$, $y(x+1) = x^2 - 4$, $y = \frac{x^2 - 4}{x+1}$ (отметим, что $x = -1$ не является решением; это видно из предпоследнего уравнения).

Из дроби $\frac{x^2 - 4}{x+1}$ выделим целую часть. $y = x - 1 - \frac{3}{x+1}$. Перенесем $x - 1$ в левую

часть, тогда имеем $y - x + 1 = -\frac{3}{x+1}$.

Умножая левую и правую часть на $x+1$, получаем уравнение, которое решается первым способом: $(y - x + 1)(x + 1) = -3$,

$$\begin{cases} y - x + 1 = 1 \\ x + 1 = -3 \end{cases} \begin{cases} y - x + 1 = -1 \\ x + 1 = 3 \end{cases} \begin{cases} y - x + 1 = 3 \\ x + 1 = -1 \end{cases} \begin{cases} y - x + 1 = -3 \\ x + 1 = 1 \end{cases}.$$

Решая эти системы, получаем целые решения исходного уравнения:

$(-4; 4), (2; 0), (-2; 0), (0; -4)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение в целых числах $x^2 - xy + 2x + 2 = 0$.
2. Решите уравнение в целых числах $xy - 2x^2 + 5x - 2y - 3 = 0$
3. Решите уравнение в целых числах $x^2 + xy - x - y - 7 = 0$.

3. Преобразование левой части уравнения в сумму неотрицательных слагаемых

Пример 1. Решите уравнение в целых числах $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Ответ: $(-3; 2), (-3; -2), (3; 2), (3; -2)$.

Решение. Левая часть уравнения представляет сумму неотрицательных слагаемых. Заметим, что $(6x^2) \leq 74$, $x^2 \leq 9$ или $|x| \leq 3$. Видим, что x может принимать значения, равные $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Если $x=-3$ или $x=3$, то уравнение примет вид $54 + 5y^2 = 74$. Отсюда $5y^2 = 20$, $y^2 = 4$, $y = \pm 2$.

Таким образом, получаем решения $(-3; 2), (-3; -2), (3; 2), (3; -2)$.

Если $x=-2$ или $x=2$, то уравнение примет вид $24 + 5y^2 = 74$. Отсюда $5y^2 = 50$, $y^2 = 10$, $y = \pm\sqrt{10}$. Уравнение не имеет целых решений.

Если $x=-1$ или $x=1$, то уравнение примет вид $6 + 5y^2 = 74$. Отсюда $5y^2 = 68$, $y^2 = 13,6$. Уравнение не имеет целых решений.

Если $x=0$, то уравнение примет вид $5y^2 = 74$. Отсюда $y^2 = 14,8$. Уравнение не имеет целых решений.

Пример 2. Решите в натуральных числах уравнение $5x + 8y = 39$.

Ответ: $(3; 3)$

Решение. Левая часть уравнения представляет сумму неотрицательных слагаемых. Так как мы решаем уравнение в натуральных числах, то для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства

$$\begin{cases} 5x = 39 - 8y \\ 8y = 39 - 5x \end{cases} \quad \begin{cases} 39 - 8y > 0 \\ 39 - 5x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq y \leq 4 \\ 1 \leq x \leq 7 \end{cases}.$$

Проведём перебор по неизвестной y .

Если $y = 1$, то $x = 6,2$ не является натуральным числом.

Если $y = 2$, то $x = 4,6$ не является натуральным числом.

Если $y = 3$, то $x = 3$.

Если $y = 4$, то $x = 1,4$ не является натуральным числом.

Пример 3. Решите уравнение в целых числах $5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 = 6$

Ответ: $(0; 3)$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $5(x^4 + 2x^2 + 1) + 2(y^6 + 2y^3 + 1) = 13$, $5(x^2 + 1)^2 + 2(y^3 + 1)^2 = 13$. Левая часть уравнения представляет сумму неотрицательных слагаемых. Заметим, что $(x^2 + 1)^2 \leq 2,6$, $|x^2 + 1| \leq 1$. Отсюда $x=0$.

Подставим полученное значение в исходное уравнение, тогда получаем $2y^6 + 4y^3 - 6 = 0$ или $y^6 + 2y^3 - 3 = 0$. В последнем уравнении можно сделать замену переменной, тогда $y^3 = 1$ или $y^3 = 3$. Т.к. мы решаем уравнение в целых числах, то $y=1$, а $x=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение в целых числах $(x + 2y)^2 + (3y)^2 = 58$.
2. Решите уравнение в целых числах $2x^2 - 12xy + 19y^2 = 132$.

4. Решение уравнений в целых числах с использованием неотрицательности дискриминанта

Пример 1. Решите уравнение в целых числах $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$.

Ответ: $(0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2)$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$

1) Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a = 1, b = -(y + 1), c = y^2 - y$.

Найдем дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (y + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 - y) = y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y = -3y^2 + 6y + 1.$$

2) Для того, чтобы уравнение $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$ имело решения, дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $-3y^2 + 6y + 1 \geq 0$ или $3y^2 - 6y - 1 \leq 0$. Корни

квадратного трехчлена $3y^2 - 6y - 1$ равны $\frac{3 \pm \sqrt{12}}{3}$, а решением неравенства

$$3y^2 - 6y - 1 \leq 0 \text{ будет отрезок: } \left[\frac{3 - \sqrt{12}}{3}; \frac{3 + \sqrt{12}}{3} \right].$$

Заметим, что $\frac{3 - \sqrt{12}}{3} < 0$ и $\frac{3 + \sqrt{12}}{3} > 2$, то y может принимать значения 0; 1; 2.

3) Если $y = 0$, то уравнение $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$ примет вид $x^2 - x = 0$. Отсюда $x(x - 1) = 0$, или $x = 0, x = 1$.

Если $y = 1$, то уравнение $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$ примет вид $x^2 - 2x = 0$. Отсюда $x(x - 2) = 0$, или $x = 0, x = 2$.

Если $y = 2$, то уравнение $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$ примет вид $x^2 - 3x + 2 = 0$. Отсюда $x = 1, x = 2$.

С помощью установления условия на дискриминант мы определили возможные варианты для y .

5. Решение уравнений в целых числах через сравнение остатков

Пример 1. Решить уравнение в целых числах $x^2 + y^2 = 4z - 1$.

Ответ: в целых числах не имеет решений.

Решение. а) Заметим, что любое число при делении на 4 может давать остатки 0, 1, 2, 3, а квадрат этого числа при делении на 4 может давать остатки 0 или 1. Тогда сумма квадратов $x^2 + y^2$ может давать остатки 0, 1 или 2.

б) Число вида $4z$ нацело делится на 4, а число вида $4z - 1$ дает остаток 3.

в) В левой и правой части стоит одно и тоже число, но записанное в разных видах, поэтому при делении их на 4 должны получаться одинаковые остатки. Таким образом, исходное уравнение в целых числах не имеет решений.

Пример 2. Решить уравнение в натуральных числах $2^m = 3^n + 1$.

Ответ: $m = 2, n = 1$.

Решение. Заметим, что 3^n при делении на 8 дает остатки 1 или 3, тогда $3^n + 1$ при делении на 8 дает остатки 2 или 4. При этом, если $m \leq 3$ число вида 2^m нацело делится на 8. Остатки левой и правой части должны быть равными, а это возможно при $m = 1$ или $m = 2$.

Перебираем возможные варианты. Если $m = 1$, то $2 = 3^n + 1$ или $3^n = 1$, $n = 0$ (это значение не подходит, т.к. мы ищем решения в натуральных числах).

Если $m = 2$, то $2^2 = 3^n + 1$ или $3^n = 3$, $n = 1$.

Пример 3. Решить уравнение в целых числах $x^2 + 54 = y^2$.

Ответ: в целых числах не имеет решений.

Решение.

а) Квадрат любого числа при делении на 4 может давать остатки 0 или 1. Число 54 при делении на 4 дает остаток 2, тогда $x^2 + 54$ может давать остатки 2 или 3.

б) В правой части y^2 при делении на 4 дает остаток 0 или 1.

в) В левой и правой части стоит одно и тоже число, но записанное в разных видах, поэтому при делении их на 4 должны получаться одинаковые остатки. Таким образом, исходное уравнение в целых числах не имеет решений.

Пример 4. Решите уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

Ответ: $x = 4m + 3$, $y = 3m + 2$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3x = 4y + 1$. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть. Рассмотрим три случая.

1) Если $y = 3m$, где $m \in \mathbb{Z}$, то $4y + 1 = 12m + 1$ не делится на 3.

2) Если $y = 3m + 1$, то $4y + 1 = 4(3m + 1) + 1 = 12m + 5$ не делится на 3.

3) Если $y = 3m + 2$, то $4y + 1 = 4(3m + 2) + 1 = 12m + 9$ делится на 3, поэтому $3x = 12m + 9$, $x = 4m + 3$.

Ответ: $x = 4m + 3$, $y = 3m + 2$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Решите в целых числах уравнение $79y - 23x = 1$

Ответ: $x = 79n + 24$; $y = 23n + 7$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Проведём деление с остатком $79 = 23 \cdot 3 + 10$ и перепишем исходное уравнение в виде $23x = 79y - 1 = 69y + 10y - 1$, $23x - 69y = 10y - 1$. Левая часть последнего уравнения делится нацело на 23, поэтому и правая часть должна делиться на 23. Имеем $10y - 1 = 23t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Для полученного нового уравнения повторим процедуру уменьшения коэффициентов. $10y - 20t = 3t + 1$; $3t + 1 = 10u$, где $u \in \mathbb{Z}$.

Проведём ещё раз процедуру уменьшения коэффициентов. $3t + 1 = 10u = (3 \cdot 3 + 1)u$; $3t - 9u = u - 1$; $u - 1 = 3n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Выразим x и y через n . Так как $u = 3n + 1$, то $3t = 10u - 1 = 10(3n + 1) - 1 = 30n + 9$;
 $t = 10n + 3$. $10y = 23t + 1 = 23(10n + 3) + 1 = 230n + 70$; $y = 23n + 7$.
 $23x = 79y - 1 = 79(23n + 7) - 1 = 79 \cdot 23n + 552$; $x = 79n + 24$.

Пример 6. Решите в целых числах уравнение: $3^m + 7 = 2^n$.

Ответ: $m=2, n=4$ или $m=0, n=3$.

Решение.

1) Если $m < 0$, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Действительно, $0 < 3^m < 1$, тогда правая часть уравнения $3^m = 2^n - 7$ является целым числом при $n \geq 0$ (что невозможно) или правая часть уравнения $7 = 2^n - 3^m$ меньше 7 при $n < 0$.

2) Пусть $m=0$, тогда из уравнений $2^n = 8$ получаем $n=3$.

3) Теперь считаем $m \neq 0$. Так как уравнение содержит степень с основанием 3, то имеет смысл рассмотреть остатки при делении на 3. Левая часть исходного уравнения при делении на 3 имеет остаток 1.

При четном $n=2k$ выражение $2^{2k} = 4^k = (3+1)^k = 3^k + 3^{k-1} + \dots + 3 + 1 = 3t + 1$ при делении на 3 имеет остаток 1.

При нечетном $n=2k+1$ выражение $2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k = 2(3t+1) = 6t+2$ при делении на 3 имеет остаток 2.

Итак, получаем, что $n=2k$.

Тогда уравнение запишем в виде $3^m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7$. Правая часть последнего уравнения $3^m = 4^k - 7$ имеет остаток 1 при делении на 8.

Когда левая часть 3^m имеет остаток 1? Легко показать, что при четном $m=2p$. Действительно, выражение $3^{2p} = 9^p = (8+1)^p = 8^k + 8^{k-1} + \dots + 8 + 1 = 8s + 1$ при делении на 8 имеет остаток 1.

При нечетном $m=2p+1$ выражение $3^{2p+1} = 3 \cdot 9^p = 3(8s+1) = 24s+3$ при делении на 8 имеет остаток 3.

Остатки левой и правой части при делении на 8 должны совпадать, поэтому $m=2p$.

Тогда уравнение запишем в виде $2^{2k} - 3^{2p} = 7$ или $(2^k - 3^p)(2^k + 3^p) = 7$. Так как $2^k + 3^p > 2^k - 3^p$ и

$$2^k + 3^p > 0, \text{ то имеет единственный случай } \begin{cases} 2^k + 3^p = 7 \\ 2^k - 3^p = 1 \end{cases}$$

Отсюда получаем $k=2, p=1$ или $m=2, n=4$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 14$
2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 7y = 10$
3. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 5xy - y^2 = 6$

Литература

1. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. – 391 с.
2. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач. / Панферов В.С., Сергеев И.Н. ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.
3. Патрусевич М.Я. и др. ЕГЭ 2011. Математика. Арифметика и алгебра / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2011. – 48 с.
4. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы: Учебно-метод. пособие / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – М.: Дрофа, 2001.
5. www.mathege.ru (открытый банк заданий)

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Учебно-методическое издание

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Уравнения. Системы уравнений и неравенств. Задачи с параметрами.

Уравнения в целых числах.

**Баишева Марина Ивановна,
Дедюкина Любовь Лукинична,
Павлов Алексей Николаевич,
Шредер Инесса Владимировна**

Редактор: *О.А. Капитанова*
Компьютерная верстка: *С.Э. Данилова*

Подписано в печать Формат 60х84 1/16. Гарнитура Times Sakha Unicode.
Печать лазерная. Усл.п.л. ... Тираж 500 экз.

Издательство ГОУ ДПО «Институт развития образования и повышения квалификации» РС(Я),
677000, г.Якутск, пр. Ленина, 3
Отпечатано в типографии ГОУ ДПО «ИРОиПК» 677000, г.Якутск, пр. Ленина, 3