



# ПОДГОТОВКА К ОГЭ

*Материалы для самостоятельной  
работы учащихся на повторение курса  
математики 7 – 8 классов*



### *Уважаемые учащиеся!*

Вы, конечно, знаете, что после окончания 9 класса вас ожидает Государственная итоговая аттестация (ГИА) по предмету математика в форме Основного государственного экзамена (ОГЭ). Для того чтобы подготовиться к ОГЭ за период летних каникул, вам необходимо повторить теорию, выучить формулы и выполнить предложенные задания.

Контрольно – измерительные материалы ОГЭ по математике состоят из трех модулей: «Алгебра», «Геометрия» и «Реальная математика». Теоретические сведения и задания, представленные в данном сборнике, также разбиты на модули.

Рекомендации по работе со сборником:

1. Выберите одну из тем для повторения
2. Внимательно изучите теоретические сведения.
3. Выучите формулы, отмеченные знаком «У»
4. Выполните задания для самостоятельной работы

## *Содержание*

<b>Модуль «Алгебра»</b> .....	4
Тема 1. Алгебраические выражения.....	5
Задания для самостоятельного выполнения.....	6
Тема 2. Уравнения .....	8
Задания для самостоятельного выполнения.....	10
Тема 3. Степени .....	12
Задания для самостоятельного выполнения.....	13
Тема 4.Квадратные корни .....	16
Задания для самостоятельного выполнения.....	17
Тема 5. Неравенства .....	19
Задания для самостоятельного выполнения.....	21
Тема 6. Системы уравнений и неравенств .....	27
Задания для самостоятельного выполнения.....	28
<b>Модуль «Геометрия»</b> .....	31
Тема 7. Треугольники.....	32
Задания для самостоятельного выполнения.....	34
Тема 8. Четырехугольники.....	39
Задания для самостоятельного выполнения.....	40
Тема 9. Площади фигур.....	47
Задания для самостоятельного выполнения.....	49
Тема 10. Окружность, круг и их элементы.....	54
Задания для самостоятельного выполнения.....	57
<b>Модуль «Реальная математика»</b> .....	62
Тема 11. Анализ диаграмм, таблиц, графиков.....	63
Задания для самостоятельного выполнения.....	63
Интернет – источники.....	82

# Модуль «Алгебра»



*Тема 1. Алгебраические выражения*

Выражения, в которых наряду с буквами могут быть использованы числа, знаки арифметических действий и скобки, называются **алгебраическими выражениями**.

Примеры алгебраических выражений:

$$2m - n; \quad 3 \cdot (2a + b); \quad 0,24x; \quad 0,3a - b \cdot (4a + 2b); \quad a^2 - 2ab; \\ \frac{x-y}{2}; \quad \frac{4}{x}; \quad \frac{5}{x-3}; \quad \frac{a}{b}; \quad \frac{1}{a+b}; \quad \frac{2a-5c}{a+c}.$$

Если в алгебраическом выражении буквы (переменные) заменить их значениями и выполнить указанные действия, то полученное в результате число называется **значением алгебраического выражения**.

**Пример 1.** Найти значение выражения: 1)  $a + 2b - c$  при  $a = -2$ ;  $b = 10$ ;  $c = -3,5$ .

*Решение.*

$a + 2b - c$  при  $a = -2$ ;  $b = 10$ ;  $c = -3,5$ . Вместо переменных подставим их значения. Получим:  $-2 + 2 \cdot 10 - (-3,5) = -2 + 20 + 3,5 = 18 + 3,5 = 21,5$ .

Значения буквы (переменной), при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями буквы (переменной).

**Пример 2.** При каких значениях переменной выражение не имеет смысла?

$$1) \frac{6}{a}; \quad 2) \frac{1}{x-4}; \quad 3) \frac{x-2}{x+2}; \quad 4) \frac{3}{5-|x|}.$$

*Решение.* Мы знаем, что на нуль делить нельзя, поэтому, каждое из данных выражений не будет иметь смысла при том значении буквы (переменной), которая обращает знаменатель дроби в нуль!

В примере 1) это значение  $a = 0$ . Действительно, если вместо  $a$  подставить 0, то нужно будет число 6 делить на 0, а этого делать нельзя. Ответ: выражение 1) не имеет смысла при  $a = 0$ .

В примере 2) знаменатель  $x - 4 = 0$  при  $x = 4$ , следовательно, это значение  $x = 4$  и нельзя брать. Ответ: выражение 2) не имеет смысла при  $x = 4$ .

В примере 3) знаменатель  $x + 2 = 0$  при  $x = -2$ . Ответ: выражение 3) не имеет смысла при  $x = -2$ .

В примере 4) знаменатель  $5 - |x| = 0$  при  $|x| = 5$ . А так как  $|5| = 5$  и  $|-5| = 5$ , то нельзя брать  $x = 5$  и  $x = -5$ . Ответ: выражение 4) не имеет смысла при  $x = -5$  и при  $x = 5$ .

Для упрощения алгебраических выражений применяют законы (свойства) умножения.

**$a \cdot b = b \cdot a$**  (переместительный: от перестановки множителей произведение не меняется).

**$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$**  (сочетательный: чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего).

**Пример 3.** Упростить выражения:

*Решение.*

$$1) 4 \cdot x \cdot (-2,5) = -4 \cdot 2,5 \cdot x = -10x.$$

$$2) -3,5 \cdot 2y \cdot (-1) = 7y.$$

$$3) 3a \cdot (-3) \cdot 2c = -18ac.$$

Если алгебраическое выражение дано в виде сократимой дроби, то пользуясь правилом сокращения дроби его можно упростить, т.е. заменить тождественно равным ему более простым выражением.

**Пример 4.** Упростите, используя сокращение дробей.

$$10) \frac{6ab}{9bc}; \quad 11) \frac{5a^2}{9a}; \quad 12) \frac{7mn}{21n}.$$

*Решение.* Сократить дробь — это значит разделить ее числитель и знаменатель на одно и то же число (выражение), отличное от нуля. Дробь 10) сократим на  $3b$ ; дробь 11) сократим на  $a$  и дробь 12) сократим на  $7n$ . Получаем:

$$10) \frac{6ab}{9bc} = \frac{2a}{3c}; \quad 11) \frac{5a^2}{9a} = \frac{5a}{9}; \quad 12) \frac{7mn}{21n} = \frac{m}{3}.$$

Зачастую при упрощении дробных выражений необходимо применить формулы сокращенного умножения и вынесение общего множителя за скобки.

*Формулы сокращенного умножения:*

- Формула квадрата суммы:  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Формула квадрата разности:  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Формула разности квадратов:  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

**У**

**Пример 5.** Упростите выражение  $\frac{x^2 - 4}{4x^2} \cdot \frac{2x}{x+2}$  и найдите его значение при  $x = 4$ . В ответ запишите полученное число.

*Решение.*

Упростим выражение:

$$\frac{x^2 - 4}{4x^2} \cdot \frac{2x}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{4x^2} \cdot \frac{2x}{x+2} = \frac{x-2}{2x}.$$

При  $x = 4$ , значение полученного выражения равно 0,25. Ответ: 0,25.

**Важно!** Иногда при упрощении выражений необходимо приводить алгебраические дроби к общему знаменателю (№6) или применить свойства степени (№7, см. тему 3)

### Задания для самостоятельного выполнения

1. Упростите выражение  $7b + \frac{2a - 7b^2}{b}$ , найдите его значение при  $a = 9$ ;  $b = 12$ . В ответ запишите полученное число.

2. Упростите выражение  $\frac{a^2 + 4a}{a^2 + 8a + 16}$  и найдите его значение при  $a = -2$ . В ответ запишите полученное число.

3. Упростите выражение  $\frac{2c - 4}{cd - 2d}$  и найдите его значение при  $c = 0,5$ ;  $d = 5$ . В ответ запишите полученное число.

4. Упростите выражение  $\frac{x^2 - 4}{4x^2} \cdot \frac{2x}{x+2}$  и найдите его значение при  $x = 4$ . В ответ запишите полученное число.

5. Упростите выражение  $\frac{xy + y^2}{15x} \cdot \frac{3x}{x+y}$  и найдите его значение при  $x = 18$ ,  $y = 7,5$ . В ответе запишите найденное значение.

6. Представьте в виде дроби выражение  $\frac{10x}{2x-3} - 5x$  и найдите его значение при  $x = 0,5$ . В ответ запишите полученное число.

7. Упростите выражение  $\frac{a^{-11} \cdot a^4}{a^{-3}}$  и найдите его значение при  $a = -\frac{1}{2}$ . В ответе запишите полученное число.

8. Упростите выражение  $\frac{(a-2b)^2 - 4b^2}{a}$  и найдите его значение при  $a = 0,3$ ;  $b = -0,35$ .

9. Найдите значение выражения  $\frac{64b^2 + 128b + 64}{b} : \left(\frac{4}{b} + 4\right)$  при  $b = -\frac{15}{16}$ .

10. Найдите значение выражения  $\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \cdot \frac{1}{a+1}$  при  $a = -5$ .

11. Найдите значение выражения  $\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a} + 2\right) \cdot \frac{1}{a+3}$  при  $a = 6$ .

12. Найдите значение выражения  $\frac{a(b-3a)^2}{3a^2 - ab} - 3a$  при  $a = 2,18$ ,  $b = -5,6$ .

13. Упростите выражение  $\frac{6c - c^2}{1 - c} : \frac{c^2}{1 - c}$  и найдите его значение при  $c = 1,2$ . В ответе запишите найденное значение.

14. Упростите выражение  $\frac{xy + y^2}{15x} \cdot \frac{3x}{x + y}$  и найдите его значение при  $x = 18$  и  $y = 7,5$ . В ответе запишите найденное значение.

15. Сократите дробь  $\frac{(3x+7)^2 - (3x-7)^2}{x}$ .

16. Упростите выражение  $\frac{9b}{a-b} \cdot \frac{a^2 - ab}{54b}$  и найдите его значение при  $a = -63$ ,  $b = 9,6$ . В ответе запишите найденное значение.

17. Найдите значение выражения  $\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{1}{b+a}$  при  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{3}$ .

18. Найдите значение выражения  $\frac{1}{4x} - \frac{4x+y}{4xy}$  при  $x = \sqrt{42}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .

19. Найдите значение выражения  $\frac{16}{4a - a^2} - \frac{4}{a}$  при  $a = -12$ .

20. Найдите значение выражения  $(a^3 - 25a) \left(\frac{1}{a+5} - \frac{1}{a-5}\right)$  при  $a = -39$ .

21. Найдите значение выражения  $(x-3) : \frac{x^2 - 6x + 9}{x+3}$  при  $x = -21$ .

22. Найдите значение выражения  $\left(\frac{a+2b}{a^2-2ab} - \frac{1}{a}\right) : \frac{b}{2b-a}$  при  $a = 1,6$ ,  $b = \sqrt{2} - 1$ .

23. Найдите значение выражения  $\frac{8ab}{a+8b} \cdot \left(\frac{a}{8b} - \frac{8b}{a}\right)$  при  $a = 8\sqrt{3} + 7$ ,  $b = \sqrt{3} - 3$ .

24. Найдите значение выражения  $\left(\frac{y}{5x} - \frac{5x}{y}\right) : (y+5x)$  при  $x = \frac{1}{7}$ ,  $y = \frac{1}{4}$ .

25. Найдите значение выражения  $\frac{8a}{9c} - \frac{64a^2 + 81c^2}{72ac} + \frac{9c - 64a}{8a}$  при  $a = 78$ ,  $c = 21$ .

26. Найдите значение выражения  $\left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{7a}\right) \cdot \frac{a^2}{4}$  при  $a = 7,7$ .

27. Упростите выражение  $(2-c)^2 - c(c+4)$ , найдите его значение при  $c = 0,5$ . В ответ запишите полученное число.

28. Найдите значение выражения  $a^{12} \cdot (a^{-4})^4$  при  $a = -\frac{1}{2}$ .

29. Найдите значение выражения  $(2x + 3y)^2 - 3x\left(\frac{4}{3}x + 4y\right)$  при  $x = -1,038, y = \sqrt{3}$ .
30. Найдите значение выражения  $(8b - 8)(8b + 8) - 8b(8b + 8)$  при  $b = 2,6$ .

## **Тема 2. Уравнения**

### *Линейные уравнения*

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением. Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется левой частью уравнения, а выражение, стоящее справа, - правой частью уравнения.

Линейным называется такое уравнение, в котором неизвестное  $x$  находится в числителе уравнения и без показателей. Например:  $2x - 5 = 3$

Линейные уравнения сводятся к виду  $ax = b$ , которое получается при помощи раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых, переноса слагаемых из одной части уравнения в другую, а также умножения или деления обеих частей уравнения на число, отличное от нуля.

**Пример 6.** Решить уравнение  $5(5 + 3x) - 10x = 8$

*Решение.* Раскроем скобки:  $25 + 15x - 10x = 8$

Перенесем неизвестные слагаемые в левую часть уравнения, а известные в правую. При переносе из одной части в другую, у слагаемого меняется знак на противоположный:  $15x - 10x = 8 - 25$

Приведем подобные слагаемые:  $5x = -17$  это конечный результат преобразований.

После преобразований к виду  $ax = b$ , где,  $a \neq 0$ , корень уравнения находим по формуле

$$x = \frac{b}{a}$$

$$x = -\frac{17}{5}, x = -3,4$$

Ответ:  $-3,4$

**Важно!** Иногда уравнение может быть представлено в дробно – рациональном виде (№15) и оно сводится к линейному уравнению. Для этого нужно найти общий знаменатель.

### *Квадратные уравнения*

Квадратное уравнение — уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a, b, c$  — некоторые числа  $a \neq 0$ ,  $x$  — неизвестное. Перед тем как решать уравнение, необходимо раскрыть скобки и собрать все слагаемые в левой части уравнения.

Числа  $a, b, c$  называются коэффициентами квадратного уравнения.

$a$  - старший коэффициент;  $b$  - средний коэффициент;  $c$  - свободный член.

Если в квадратном уравнении коэффициенты  $b$  и  $c$  не равны нулю, то уравнение называется полным квадратным уравнением. Например, уравнение  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ . Если один из коэффициентов  $b$  или  $c$  равен нулю или оба коэффициента равны нулю, то квадратное уравнение называется неполным. Например,  $5x^2 - 2x = 0$ .

*Решение неполных квадратных уравнений*

1) Неполное квадратное уравнение имеет вид  $ax^2 + bx = 0$ , если  $a \neq 0; c = 0$ . В левой части этого уравнения есть общий множитель  $x$ .

1. Вынесем общий множитель  $x$  за скобки.

Мы получим  $x(ax + b) = 0$ . Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому получаем  $x = 0$  или  $ax + b = 0$ . Таким образом, данное уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$x = 0; ax + b = 0$$

2. Решаем получившиеся уравнения каждое отдельно. Мы получим  $x = 0$  и  $x = -\frac{b}{a}$ .

Следовательно, данное квадратное уравнение имеет два корня  $x = 0$  и  $x = -\frac{b}{a}$

**Пример 7.** Решить уравнение  $4x^2 - 5x = 0$



*Решение.*

Вынесем  $x$  как общий множитель за скобки:  $x(4x-5)=0$

Приравняем каждый множитель к нулю и найдем корни уравнения.

$x=0$  или  $4x-5=0$ , значит  $x_1=0$  и  $x_2=1,25$

Ответ:  $x_1=0$  и  $x_2=1,25$

2) Неполное квадратное уравнение вида  $ax^2+c=0, a \neq 0, b=0$

Для решения данного неполного квадратного уравнения выразим  $x^2$ .

$$ax^2+c=0, ax^2=-c, x^2=\frac{-c}{a}$$

При решении последнего уравнения возможны два случая:

- если  $\frac{-c}{a} > 0$ , то получаем два корня:  $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$
- если  $\frac{-c}{a} < 0$ , то уравнение во множестве действительных чисел не имеет решений.

**Пример 8.** Решить уравнение  $x^2-16=0$

*Решение.*  $x^2-16=0, x^2=16, x=\pm 4$ . Ответ:  $x_1=4, x_2=-4$

*Решение полного квадратного уравнения*

1) *Решение с помощью дискриминанта*

Дискриминантом квадратного уравнения  $D$  называется выражение  $b^2-4ac$ .

При решении уравнения с помощью дискриминанта возможны три случая:

1.  $D > 0$ . Тогда корни уравнения равны:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2.  $D = 0$ . В данном случае решение даёт два двукратных корня:  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3.  $D < 0$ . В этом случае уравнение не имеет корней.

**Пример 9.** Решить уравнение  $3x^2-11=-8x$

Соберем все слагаемые в левую часть уравнения и расставим в порядке убывания степеней

$$3x^2+8x-11=0, a=3, b=8, c=-11$$

$$D=b^2-4ac=8^2-4 \cdot 3 \cdot (-11)=196$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + 14}{6} = 1 \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 - 14}{6} = -3 \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } x_1=1, x_2=-3 \frac{2}{3}$$

2) *Устные способы решения квадратных уравнений*

Если сумма коэффициентов равна нулю ( $a+b+c=0$ ), то  $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}$

**Пример 10.** Решить уравнение  $4x^2+3x-7=0$

*Решение.*  $4+3-7=0$ , следовательно  $x_1=1, x_2=\frac{-7}{4}$ . Ответ:  $x_1=1, x_2=\frac{-7}{4}$ .

Если старший коэффициент в сумме со свободным равен среднему коэффициенту ( $a+c=b$ ), то

$$x_1=-1, x_2=\frac{-c}{a}$$

**Пример 11.** Решить уравнение  $5x^2+7x+2=0$

*Решение.*  $5+2=7$ , следовательно,  $x_1=-1, x_2=-\frac{2}{5}$ . Ответ:  $x_1=-1, x_2=-\frac{2}{5}$

**Важно!** Приведенные квадратные уравнения можно решать как по общей формуле, так и по теореме Виета.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

**у**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{Теорема Виета}).$$

### *Дробно рациональные уравнения*

Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называется дробным.

Чтобы решить дробное уравнение, необходимо:

1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

**Пример 12.** Решить уравнение  $4x+1-\frac{3}{x}=0$

*Решение.*

1. находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысла (ОДЗ):  
 $x=0$

2. находим общий знаменатель дробей и умножаем на него обе части уравнения

$$4x+1-\frac{3}{x}=0 \quad | \cdot x,$$

$$4x \cdot x + 1 \cdot x - \frac{3 \cdot x}{x} = 0$$

3. решаем полученное уравнение  $4x^2+x-3=0$  – квадратное уравнение, его корни

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$$

4. исключаем те корни, при которых общий знаменатель равен нулю. В первом пункте получилось, что при  $x=0$  уравнение не имеет смысла, среди корней уравнения нуля нет, значит, оба корня нам подходят.

$$\text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$$

При решении уравнения с двумя дробями можно использовать основное свойство пропорции.

Основное свойство пропорции: Если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $a \cdot d = b \cdot c$

**Пример 13.** Решить уравнение  $\frac{3x-5}{-2} = \frac{1}{x}$

*Решение.*

1. Находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысла (ОДЗ):  $x=0$

2. Воспользуемся основным свойством пропорции:  $x(3x-5) = -2$

3. Раскроем скобки и соберем все слагаемые в левой части уравнения  
 $3x^2-5x+2=0$

4. Решим данное квадратное уравнение  $x_1=1, x_2 = \frac{2}{3}$

В первом пункте получилось, что при  $x=0$  уравнение не имеет смысла, среди корней уравнения нуля нет, значит, оба корня нам подходят.

$$\text{Ответ: } x_1=1, x_2 = \frac{2}{3}$$

### **Задания для самостоятельного выполнения**

### Линейные уравнения

1. Найдите корни уравнения  $2 - 3(2x + 2) = 5 - 4x$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
2. Решите уравнение  $5 - 2x = 11 - 7(x + 2)$ .
3. Решите уравнение  $3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4$ .
4. Решите уравнение  $10x + 9 = 7x$ .
5. Решите уравнение  $-x - 2 + 3(x - 3) = 3(4 - x) - 3$ .
6. При каком значении  $x$  значения выражений  $7x - 2$  и  $3x + 6$  равны?
7. Решите уравнение  $10(x - 9) = 7$ .
8. Решите уравнение  $-9(8 - 9x) = 4x + 5$ .
9. Решите уравнение  $1 - 5x = -6x + 8$ .
10. Решите уравнение  $9 - 2(-4x + 7) = 7$ .
11. Решите уравнение  $2x + 2 = -3$ .
12. Решите уравнение  $x + 7 - \frac{x}{3} = 3$ .
13. Решите уравнение  $4x + 7 = 0$ .
14. Решите уравнение  $(-5x + 3)(-x + 6) = 0$ . Если корней несколько, запишите их в ответ в порядке возрастания, через точку с запятой.
15. Решите уравнение  $x - \frac{x}{12} = \frac{55}{12}$ .

### Квадратные уравнения

1. Решите уравнение  $x^2 - x - 6 = 0$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
2. Решите уравнение  $x^2 + 3x = 4$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
3. Решите уравнение  $x^2 = 2x + 8$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
4. Найдите корни уравнения  $25x^2 - 1 = 0$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
5. Найдите корни уравнения  $2x^2 - 10x = 0$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
6. Решите уравнение  $(x + 2)^2 = (x - 4)^2$ .
7. Найдите корни уравнения  $x^2 + 4 = 5x$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
8. Найдите корни уравнения  $x^2 - 7x - 18 = 0$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
9. Уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет корни  $-6$ ;  $4$ . Найдите  $q$ .
10. Решите уравнение  $(x - 4)^2 + (x + 9)^2 = 2x^2$ .
11. Решите уравнение  $-2x^2 + x + 7 = -x^2 + 5x + (-2 - x^2)$ .
12. Решите уравнение  $(x + 10)^2 = (5 - x)^2$ .
13. Решите уравнение  $4x^2 + 7 = 7 + 24x$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
14. Решите уравнение  $8x^2 - 12x + 4 = 0$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.
18. Уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет корни  $-5$ ;  $7$ . Найдите  $q$ .

### Дробно рациональные уравнения

1. Решите уравнение:  $\frac{3}{x-19} = \frac{19}{x-3}$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

2. Решите уравнение  $\frac{x-12}{x-4} = \frac{3}{5}$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

3. Решите уравнение  $\frac{5x+4}{2} + 3 = \frac{9x}{4}$ .

4. Решите уравнение:  $3 - \frac{x}{7} = \frac{x}{3}$ .

5. Решите уравнение:  $\frac{x-6}{2} - \frac{x}{3} = 3$ .

6. Решите уравнение  $\frac{9}{x-2} = \frac{9}{2}$ .

7. Решите уравнение  $x - \frac{6}{x} = -1$ . Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

8. Решите уравнение  $13 + \frac{x}{4} = x + 1$ .

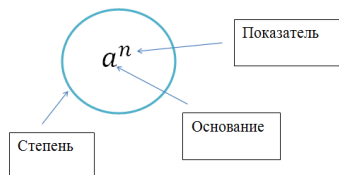
9. Решите уравнение  $\frac{x}{12} + \frac{x}{8} + x = -\frac{29}{6}$ .

10. Решите уравнение  $\frac{x+5}{5} - x = 2$ .

### Тема 3. Степени

Степенью числа  $a$  с натуральным показателем  $n$ , большим 1, называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ .

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ (n раз)}$$



В частном случае основание  $a$  с показателем 1 называется само число  $a$ .  $a^1 = a$

Степень с отрицательным основанием и чётным показателем равна степени с основанием, противоположным исходному основанию, и с тем же показателем.

$(-a)^{2n} = a^{2n}$ , где  $2n$  - четный показатель

Основание в любом отрицательном показателе степени можно представить в виде основания в таком же положительном показателе степени, изменив положение основания относительно черты дроби.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{У}$$

$$\frac{a^{-n}}{b^{-k}} = \frac{b^k}{a^n}$$

**Пример 14.**  $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

Радикал (корень) можно представить в виде степени с дробным показателем

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}} \quad \text{У}$$

**Пример 15.**  $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$

Свойства степеней У

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели складываются.  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2. При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели вычитаются  $a^n : a^m = a^{n-m}$

3. При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели перемножаются  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

4. При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5. При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6. При возведении любого основания в нулевой показатель степени результат равен единице  $a^0 = 1$

**Пример 16.** Вычислить  $\frac{2^8 \cdot (7^2)^4}{14^7}$

*Решение:*

Перед решением необходимо сделать одинаковые основания у степеней, для этого разложим основание 14 на множители и далее применим свойства степеней

$$\frac{2^8 \cdot (7^2)^4}{14^7} = \frac{2^8 \cdot (7^2)^4}{7^7 \cdot 2^7} = \frac{2^8 \cdot 7^8}{7^7 \cdot 2^7} = 2^{8-7} \cdot 7^{8-7} = 2 \cdot 7 = 14$$

Ответ: 14

**Пример 17.** Найдите значение выражения:  $\frac{a^{(\sqrt[13]{\sqrt[6]{a}})^{2\sqrt[6]{a}}}}{a^{13}}$  при  $a=5$

*Решение:*

Для начала упростим выражение, используя свойства степеней

$$\frac{a^{(\sqrt[13]{\sqrt[6]{a}})^{2\sqrt[6]{a}}}}{a^{13}} = \frac{a^{\sqrt[6]{a}} \cdot a^{2\sqrt[6]{a}}}{a^{13}} = \frac{a^{12}}{a^{13}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Подставим в полученное выражение вместо «а» число 5.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ: 0,2

### Свойства степеней

1.  $a^0 = 1$ , при  $a \neq 0$
2.  $a^1 = a$
3.  $(-a)^n = a^n$ , если  $n$  – четное
4.  $(-a)^n = -a^n$ , если  $n$  – нечетное
5.  $(ab)^n = a^n b^n$
6.  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
7.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
9.  $a^n a^m = a^{n+m}$
10.  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
11.  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

у

### Задания для самостоятельного выполнения

1. Какое из следующих выражений равно  $5^{k-3}$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $\frac{5^k}{5^3}$     2)  $\frac{5^k}{5^{-3}}$     3)  $5^k - 5^3$     4)  $(5^k)^{-3}$

2. Какое из следующих выражений равно  $25 \cdot 5^n$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $5^{n+2}$ .    2)  $5^{2n}$ .    3)  $125^n$ .    4)  $25^n$ .

3. Представьте выражение в виде степени с основанием  $c$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

$$\frac{(c^{-6})^{-2}}{c^{-3}}$$

1)  $c^9$     2)  $c^{15}$     3)  $c^{-5}$     4)  $c^{-4}$

4. Представьте выражение в виде степени с основанием  $x$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

$$\frac{x^{-10}}{x^4 \cdot x^{-5}}$$

1)  $x^{-8}$     2)  $x^{-6}$     3)  $x^{-9}$     4)  $x^{10}$

5. Найдите значение выражения  $a^7(a^{-5})^2$  при  $a = \frac{1}{5}$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $-125$     2)  $125$     3)  $-\frac{1}{125}$     4)  $\frac{1}{125}$

6. Какому из следующих выражений равна дробь  $\frac{2^n}{8}$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $2^n - 2^3$  2)  $2^{\frac{n}{3}}$  3)  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  4)  $2^{n-3}$

7. Представьте выражение  $(m^{-9})^{-8} \cdot m^{13}$  в виде степени с основанием  $m$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $m^{85}$  2)  $m^{-4}$  3)  $m^{59}$  4)  $m^{-30}$

8. Представьте выражение  $\frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{x^9}$  в виде степени с основанием  $x$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $x^{14}$  2)  $x^{54}$  3)  $x^{-45}$  4)  $x^{-14}$

9. Представьте выражение  $\frac{1}{x^{-4}} \cdot \frac{1}{x^5}$  в виде степени с основанием  $x$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $x^{-1}$  2)  $x^{20}$  3)  $x^1$  4)  $x^{-20}$

10. Какое из данных ниже выражений при любых значениях  $n$  равно дроби  $\frac{5^n}{125}$ ?

1)  $5^{n-3}$  2)  $5^{\frac{n}{2}}$  3)  $25^n$  4)  $\frac{1}{5^n}$

11. Найдите значение выражения  $0,6 \cdot (-10)^3 + 50$ .

12. Найдите значение выражения  $80 + 0,9 \cdot (-10)^3$ .

13. Запишите в ответе номера тех выражений, значение которых равно 0.

*Номера запишите в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.*

1)  $(-1)^4 + (-1)^5$  2)  $(-1)^5 - (-1)^4$  3)  $(-1)^4 - (-1)^5$  4)  $(-1)^5 + (-1)^4$

14. Запишите десятичную дробь, равную сумме  $3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-4}$ .

15. Найдите значение выражения  $\frac{3^8 \cdot 3^5}{3^9}$ .

16. Найдите значение выражения  $80 + 0,4 \cdot (-10)^3$ .

17. Найдите значение выражения  $0,9 \cdot (-10)^2 - 120$ .

18. Найдите значение выражения  $-0,2 \cdot (-10)^2 + 55$ .

19. Найдите значение выражения  $0,8 \cdot (-10)^2 - 95$ .

20. Найдите значение выражения  $0,7 \cdot (-10)^3 - 20$ .
21. Найдите значение выражения  $-0,7 \cdot (-10)^2 + 90$ .
22. Найдите значение выражения  $-90 + 0,7 \cdot (-10)^3$ .
23. Найдите значение выражения  $45 + 0,6 \cdot (-10)^2$ .
24. Найдите значение выражения  $-80 + 0,3 \cdot (-10)^3$ .
25. Найдите значение выражения  $0,6 \cdot (-10)^3 + 50$ .
26. Найдите значение выражения  $80 + 0,9 \cdot (-10)^3$ .
27. Найдите значение выражения  $5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-4}$ .
28. Найдите значение выражения  $30 \cdot (-0,1)^3 + 7 \cdot (-0,1)^2 - 3,9$ .
29. Найдите значение выражения  $-0,6 \cdot (-9)^4 + 1,9 \cdot (-9)^2 - 4$ .
30. Найдите значение выражения  $(16 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (13 \cdot 10^4)$ .
31. Найдите значение выражения  $(4,9 \cdot 10^{-3})(4 \cdot 10^{-2})$ .
32. Найдите значение выражения  $(6,7 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^{-3})$ .

#### **Тема 4. Квадратные корни**

Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  называется неотрицательное число  $b$ , квадрат которого равен  $a$ :  $\sqrt{a} = b$  (при  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $b^2 = a$ ).

**Пример 18.**  $\sqrt{9} = 3$  ( $9 > 0$ ,  $3 > 0$ ,  $3^2 = 9$ )

При  $a < 0$  выражение  $\sqrt{a}$  не имеет смысла.

**Пример 19.**  $\sqrt{-25}$  – невозможно извлечь корень:  $5^2 = 25$  и  $-5^2 = -25$  (а не  $-25$ )

При любом  $a$ , при котором выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл, верно равенство  $(\sqrt{a})^2 = |a|$ .

**Пример 20.**  $(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25$ ,  $\sqrt{-5^2} = \sqrt{25} = 5$

*Свойства арифметического квадратного корня:*



у

1. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$ , то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18$
2. Если $a \geq 0$ и $b > 0$ , то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{81}{9}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$
3. $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$ (при $a \geq 0$ )	$(\sqrt[3]{4})^3 = \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64} = 8$ $\sqrt[3]{4^3} = (\sqrt[3]{4})^3 = 2^3 = 8$

### Преобразование выражений с квадратными корнями

Числа в квадратных корнях можно разбивать на множители:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Множители можно, наоборот, вносить под знак квадратного корня:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

Можно упростить сложные выражения с выявлением общего множителя:

$$3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} = 3\sqrt{5a} - \sqrt{4 \cdot 5a} + \sqrt{9 \cdot 5a} = 3\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a} + 3\sqrt{5a} = \sqrt{5a} (3 - 2 + 3) = 4\sqrt{5a}$$

Можно сократить дробь с применением формул сокращенного умножения:

$$\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}} = \frac{x^2 - (\sqrt{3})^2}{x + \sqrt{3}} = \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x + \sqrt{3}} = x - \sqrt{3}$$

#### Свойства арифметического квадратного корня:

1.  $\sqrt{a} = e, e \geq 0, e^2 = a$
2.  $\sqrt{a}$  при  $a < 0$  не имеет смысла
3.  $\sqrt{x} = a, x = a^2$
4. при  $a > 0$   
 $x^2 = a$   
 $x = \pm \sqrt{a}$

у

### Задания для самостоятельного выполнения

1. Значение какого из выражений является числом рациональным? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) (\sqrt{6} - 3)(\sqrt{6} + 3) \quad 2) \frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{10}} \quad 3) \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \quad 4) (\sqrt{6} - 3)^2$$

2. Расположите в порядке возрастания числа:  $\sqrt{30}$ ,  $3\sqrt{3}$ , 5,5. В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{30}; 3\sqrt{3}; 5, 5. \quad 2) 5, 5; 3\sqrt{3}; \sqrt{30}. \quad 3) 3\sqrt{3}; 5, 5; \sqrt{30}. \quad 4) 3\sqrt{3}; \sqrt{30}; 5, 5.$$

3. Расположите в порядке убывания числа:  $\sqrt{30}; 3\sqrt{3}; 5, 5$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{30}; 3\sqrt{3}; 5, 5. \quad 2) 5, 5; \sqrt{30}; 3\sqrt{3}. \quad 3) 3\sqrt{3}; 5, 5; \sqrt{30}. \quad 4) 3\sqrt{3}; \sqrt{30}; 5, 5.$$

4. Укажите наибольшее из следующих чисел. В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{18} \quad 2) 2\sqrt{6} \quad 3) 5 \quad 4) \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

5. Значение какого из данных выражений является наименьшим? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{17} \quad 2) 3\sqrt{2} \quad 3) \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{2}} \quad 4) \sqrt{3}\sqrt{5}$$

6. В каком случае числа  $2\sqrt{5}$ ,  $5\sqrt{2}$  и 6 расположены в порядке возрастания? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) 5\sqrt{2}; 2\sqrt{5}; 6 \\ 2) 2\sqrt{5}; 6; 5\sqrt{2} \\ 3) 2\sqrt{5}; 5\sqrt{2}; 6 \\ 4) 6; 2\sqrt{5}; 5\sqrt{2};$$

7. Значение какого из выражений является числом иррациональным? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \\ 2) (\sqrt{19} - \sqrt{6})(\sqrt{19} + \sqrt{6}) \\ 3) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} \\ 4) \sqrt{8} + 2\sqrt{2}$$

8. Какое из чисел  $\sqrt{0,36}$ ,  $\sqrt{36}$ ,  $\sqrt{3,6}$  является иррациональным? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{0,36} \quad 2) \sqrt{36} \quad 3) \sqrt{3,6} \quad 4) \text{ни одно из этих чисел}$$

9. Какое из чисел  $\sqrt{25000}$ ,  $\sqrt{0,0025}$ ,  $\sqrt{2,5}$  является рациональным? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{25000} \quad 2) \sqrt{0,0025} \quad 3) \sqrt{2,5} \quad 4) \text{Все эти числа иррациональны.}$$

10. Значение какого из чисел является наибольшим? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{3,6} \quad 2) 4\sqrt{0,2} \quad 3) \frac{\sqrt{64}}{4} \quad 4) \sqrt{\frac{11}{6}} \cdot \sqrt{\frac{6}{3}}$$

11. Значение какого выражения является рациональным числом? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \frac{(\sqrt{3})^3}{2} \quad 2) 3\sqrt{2^5} \quad 3) \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} \quad 4) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$$

12. Значение какого из данных выражений является наименьшим? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{23} \quad 2) 2\sqrt{7} \quad 3) (\sqrt{5})^2 \quad 4) \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2^{-7} \cdot 2^{-8}}{2^{-9}}$$

13. Найдите значение выражения  $\frac{2^{-7} \cdot 2^{-8}}{2^{-9}}$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \frac{1}{64} \quad 2) -\frac{1}{64} \quad 3) -64 \quad 4) 64$$

14. Между какими числами заключено число  $\sqrt{73}$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) 8 \text{ и } 9 \quad 2) 72 \text{ и } 74 \quad 3) 24 \text{ и } 26 \quad 4) 4 \text{ и } 5$$

15. Какое из данных чисел принадлежит промежутку  $[6; 7]$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

$$1) \sqrt{6} \quad 2) \sqrt{7} \quad 3) \sqrt{35} \quad 4) \sqrt{42}$$

16. Значение какого из выражений является числом иррациональным?

$$1) \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \quad 2) (\sqrt{19} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{19} + \sqrt{6}) \quad 3) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} \quad 4) \sqrt{8} + 2\sqrt{2}$$

### Тема 5. Неравенства

#### Линейные неравенства

Линейным неравенством с одной переменной называется неравенство вида  $ax+b>0$  или  $ax+b < 0$  или  $ax+b \geq 0$  или  $ax+b \leq 0$ .

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать что решений нет.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.

При решении неравенств используются следующие свойства:

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

**Пример 21.** Решим неравенство:  $4x+7>-5+x$

*Решение:*

- 1) Перенесем слагаемое  $x$  с противоположным знаком в левую часть, а число  $7$  с противоположным знаком в правую часть:  $4x-x > -5-7$
- 2) Приведем подобные члены:  $3x > -12$
- 3) Разделим обе части неравенства на  $3$ :  $x > -4$
- 4) Множество решений неравенства состоит из всех чисел, больших  $-4$ . Это множество представляет собой числовой промежуток  $(-4; +\infty)$ .

### *Квадратные неравенства*

Общий вид квадратных неравенств, это  $ax^2+bx+c>0$  ( $<0, \leq 0, \geq 0$ ), где  $a \neq 0$ .

Множество решений квадратного неравенства легко определить, приблизительно начертив график функции  $y=ax^2+bx+c$  (параболу).

*Шаги решения квадратного неравенства:*

1. Определяются точки пересечения параболы и оси  $x$  с помощью решения уравнения  $ax^2+bx+c=0$ . Вспомним формулы корней квадратного уравнения:

$$D=b^2-4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{У}$$

Если  $D>0$ , у уравнения два разных корня, парабола пересекает ось  $x$  в двух точках

Если  $D=0$ , у уравнения два одинаковых корня, вершина параболы находится на оси

$x$

Если  $D<0$ , у уравнения нет реальных корней, парабола не пересекает ось  $x$

Если у уравнения  $ax^2+bx+c=0$  есть ровно один корень  $x_1$ , то

- неравенство вида  $ax^2+bx+c \geq 0$  выполняется при любых значениях  $x$ . В этом случае решение неравенства — это  $(-\infty; +\infty)$ , то есть вся числовая ось.
- неравенство вида  $ax^2+bx+c > 0$  выполняется при любых значениях  $x$ , кроме  $x_1$ , так как при  $x=x_1$  выражение  $ax^2+bx+c$  равно  $0$ . Тогда решение неравенства — это объединение двух интервалов  $(-\infty; x_1)$  и  $(x_1; +\infty)$ .
- неравенство вида  $ax^2+bx+c \leq 0$  выполняется только при  $x=x_1$
- неравенство вида  $ax^2+bx+c < 0$  не выполняется ни при одном значении  $x$ . В этом случае у неравенства нет решений (решение — пустое множество  $\emptyset$ ).

2. Учитывая количество корней и знак коэффициента  $a$ , чертится график параболы.

Обрати внимание! Если  $a>0$ , ветви параболы устремлены вверх, если  $a<0$ , то вниз.

Совет: если хочешь, чтобы ветви параболы всегда были устремлены вверх, в случаях, когда  $a<0$ , сначала обе части неравенства перемножь на  $(-1)$ .

Не забудь, что на противоположный поменяется также знак неравенства.

3. Выбираются пустые или закрашенные точки, в зависимости от вида знака неравенства:

- если стоит знак нестрогого неравенства  $\leq$  или  $\geq$

У

○ если стоит знак строгого неравенства  $<$  или  $>$

4. Закрашивается правильный интервал.

5. Записывается ответ.

**Пример 22.** Решить квадратное неравенство  $-2x^2+4x-5\leq 0$

Решение:

$$-2x^2+4x-5\leq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$2x^2-4x+5\geq 0$$

$$D=16-4\cdot 2\cdot 5=-24 \text{ - парабола не пересекает ось } OX$$

Ответ:  $x\in(-\infty;+\infty)$  или  $x\in\mathbb{R}$

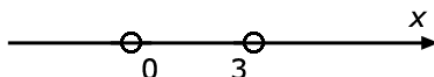
*Алгоритм решения квадратных неравенств.*

1. Делаем из неравенства уравнение. Решаем его, находим корни.
2. Рисуем ось  $X$ , отмечаем точками корни уравнения. Если исходное неравенство нестрогое, точки - черные (закрашенные). Если строгое - белые (пустые внутри).
3. Схематично рисуем параболу по исходному выражению.
4. Определяем области  $+/-$  на рисунке. Выбираем нужные области по исходному неравенству и записываем ответ.

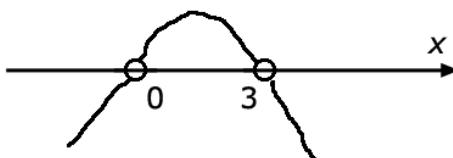
**Пример 23.** Решить неравенство:  $-x^2+3x > 0$

Решение:

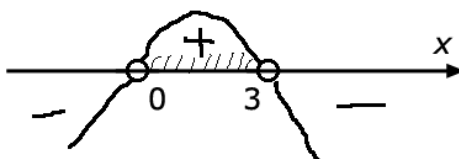
1. Делаем из неравенства уравнение:  $-x^2+3x = 0$  и решаем (любым способом), находим корни:  $x_1=0$ ,  $x_2=3$
2. Рисуем ось  $x$ , отмечаем на ней корни уравнения: здесь точки на оси белые, т.к. исходное неравенство - строгое.



3. Рисуем (схематично!) параболу: ветви параболы направлены вниз, это потому, что в исходном выражении перед  $x^2$  стоит минус.



4. Определяем области "+" и "-" на рисунке. Смотрим на исходное неравенство и соображаем, какое условие должно выполняться: больше нуля, или меньше? Нам надо больше нуля. Можно этот промежуток подштриховать.

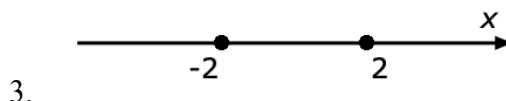


Смотрим на картину и записываем ответ:  $x \in (0; 3)$

**Пример 24.** Решить неравенство:  $x^2\leq 4$

Решение:

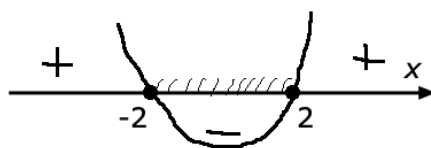
1. Переносим четвёрку влево, получаем:  $x^2-4\leq 0$
2. Делаем из неравенства уравнение:  $x^2-4=0$  и находим корни:  $x_1=-2$ ,  $x_2=2$



3.



4.



5.

Ответ:  $x \in [-2; 2]$

### Задания для самостоятельного выполнения

#### Линейные неравенства

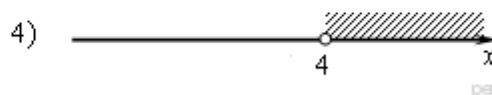
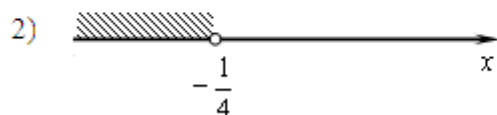
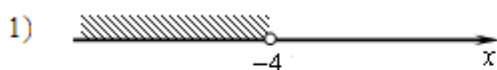
1. Решите неравенство  $20 - 3(x - 5) < 19 - 7x$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $(-4; +\infty)$  2)  $(-\infty; -\frac{1}{4})$  3)  $(-\frac{1}{4}; +\infty)$  4)  $(-\infty; -4)$

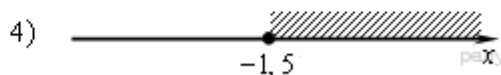
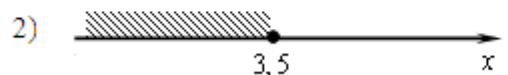
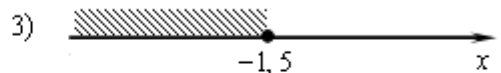
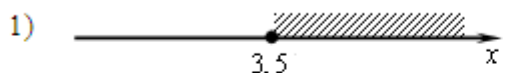
2. Решите неравенство

$$20 - 3(x - 5) < 19 - 7x$$

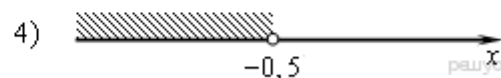
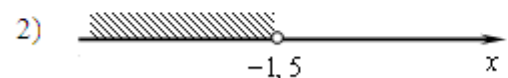
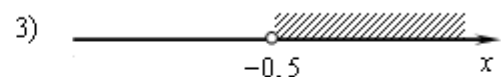
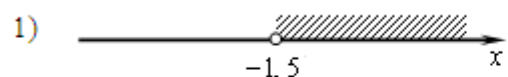
и определите, на каком рисунке изображено множество его решений. В ответе укажите номер правильного варианта.



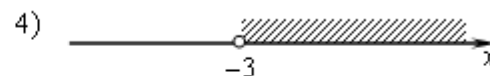
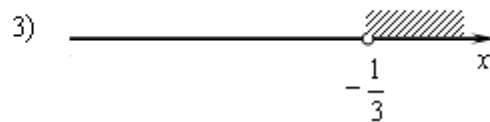
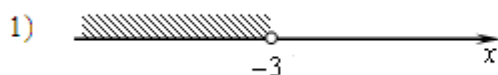
3. Решите неравенство  $4x + 5 \geq 6x - 2$  и определите, на каком рисунке изображено множество его решений. В ответе укажите номер правильного варианта.



4. Решите неравенство  $x - 1 < 3x + 2$  и определите, на каком рисунке изображено множество его решений. В ответе укажите номер правильного варианта.



5. Решите неравенство  $22 - x > 5 - 4(x - 2)$  и определите, на каком рисунке изображено множество его решений. В ответе укажите номер правильного варианта.



рашунгз.ру

6. При каких значениях  $a$  выражение  $5a + 9$  принимает отрицательные значения? В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $a > -\frac{9}{5}$  2)  $a < -\frac{5}{9}$  3)  $a > -\frac{5}{9}$  4)  $a < -\frac{9}{5}$

7. Решите неравенство  $9x - 4(2x + 1) > -8$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $(-4; +\infty)$  2)  $(-12; +\infty)$  3)  $(-\infty; -4)$  4)  $(-\infty; -12)$

8. При каких значениях  $x$  значение выражения  $9x + 7$  меньше значения выражения  $8x - 3$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $x > 4$  2)  $x < 4$  3)  $x > -10$  4)  $x < -10$

9. Решите неравенство  $6x - 7 < 8x - 9$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $(-\infty; 8)$  2)  $(-\infty; 1)$  3)  $(8; +\infty)$  4)  $(1; +\infty)$

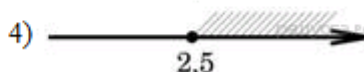
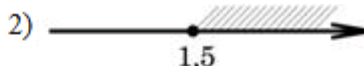
10. При каких значениях  $x$  значение выражения  $6x - 2$  больше значения выражения  $7x + 8$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $x > -10$  2)  $x < -10$  3)  $x > -6$  4)  $x < -6$

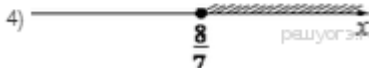
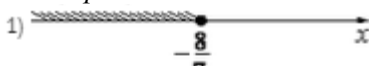
11. Решите неравенство  $4x - 4 \geq 9x + 6$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $[-0,4; +\infty)$  2)  $(-\infty; -2]$  3)  $[-2; +\infty)$  4)  $(-\infty; -0,4]$

12. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $2 + x \leq 5x - 8$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

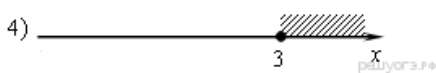
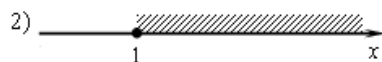


13. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $4 - 7(x + 3) \leq -9$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

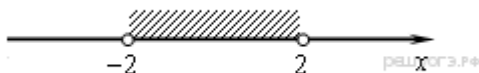


рашунгз.ру

1. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



2. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке? В ответе укажите номер правильного варианта.



1)  $x^2 + 4 < 0$     2)  $x^2 - 4 > 0$     3)  $x^2 + 4 > 0$     4)  $x^2 - 4 < 0$

3. Решите неравенство  $x^2 + x \geq 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$     2)  $[-1; 0]$   
3)  $(-1; 0)$     4)  $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

4. Решите неравенство  $x^2 - 4x < 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $[0; 4]$     2)  $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$   
3)  $(0; 4)$     4)  $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

5. Решите неравенство  $-x^2 - 2x \leq 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$     2)  $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$   
3)  $(-2; 0)$     4)  $[-2; 0]$

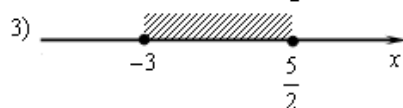
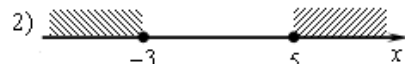
6. Решите неравенство  $x^2 + 3x > 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$     2)  $(-3; 0)$   
3)  $[-3; 0]$     4)  $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$

7. Решите неравенство  $-x^2 + x \geq 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

1)  $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$     2)  $[0; 1]$   
3)  $(0; 1)$     4)  $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

8. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $(2x - 5)(x + 3) \geq 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



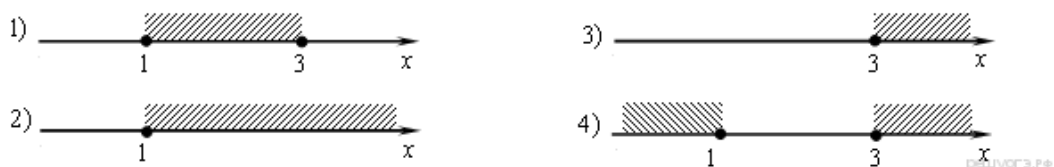
1) 1    2) 2    3) 3    4) 4



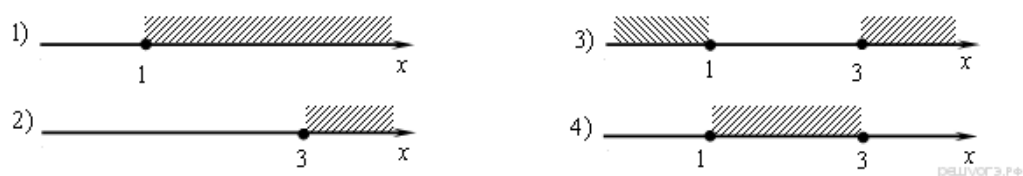
9. Решите неравенство  $x^2 < 361$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $(-\infty; -19) \cup (19; +\infty)$       2)  $(-\infty; -19] \cup [19; +\infty)$   
 3)  $(-19; 19)$       4)  $[-19; 19]$

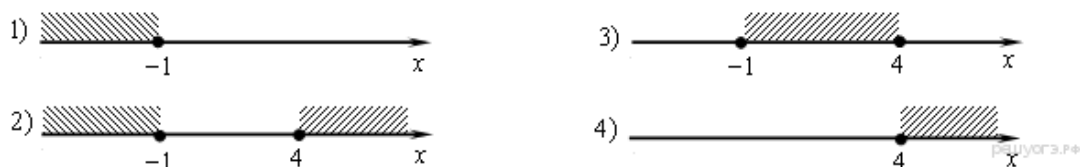
10. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



11. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



12. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

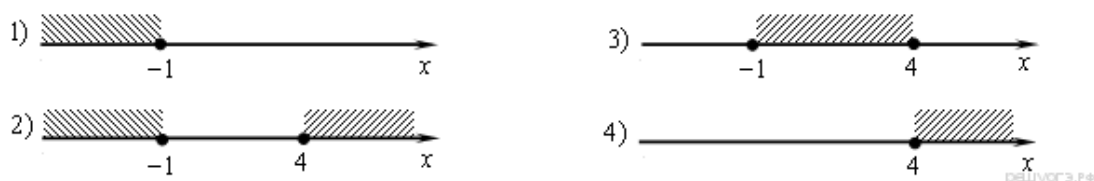


13. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке? В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1)  $x^2 - 9 > 0$     2)  $x^2 + 9 > 0$     3)  $x^2 - 9 < 0$     4)  $x^2 + 9 < 0$

14. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

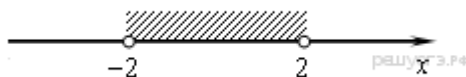


15. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке? В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1)  $x^2 + 9 < 0$    2)  $x^2 + 9 > 0$    3)  $x^2 - 9 < 0$    4)  $x^2 - 9 > 0$

16. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке? В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1)  $x^2 + 4 < 0$    2)  $x^2 - 4 > 0$    3)  $x^2 + 4 > 0$    4)  $x^2 - 4 < 0$

17. Решите неравенство:  $x^2 + 23x \leq 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $(-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$    2)  $(-\infty; -23] \cup [0; +\infty)$   
3)  $(-23; 0)$    4)  $[-23; 0]$

18. Решите неравенство:  $x^2 + 15x > 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $(-\infty; -15) \cup (0; +\infty)$    2)  $(-\infty; -15] \cup [0; +\infty)$   
3)  $(-15; 0)$    4)  $[-15; 0]$

19. Решите неравенство:  $x^2 > 529$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $(-\infty; -23) \cup (23; +\infty)$    2)  $(-\infty; -23] \cup [23; +\infty)$   
3)  $(-23; 23)$    4)  $[-23; 23]$

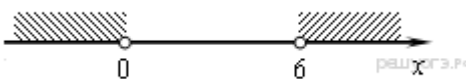
20. Укажите неравенство, которое не имеет решений. В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $x^2 - 64 \leq 0$    2)  $x^2 + 64 \geq 0$    3)  $x^2 - 64 \geq 0$    4)  $x^2 + 64 \leq 0$

21. Укажите неравенство, решением которого является любое число. В ответе укажите номер правильного варианта.

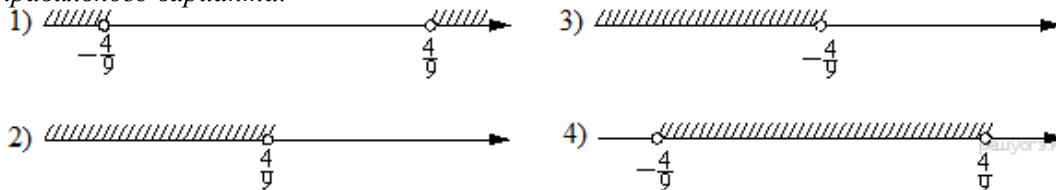
- 1)  $x^2 - 15 < 0$    2)  $x^2 + 15 > 0$    3)  $x^2 + 15 < 0$    4)  $x^2 - 15 > 0$

22. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке? В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1)  $x^2 - 6x < 0$    2)  $x^2 - 6x > 0$    3)  $x^2 - 36x < 0$    4)  $x^2 - 36x > 0$

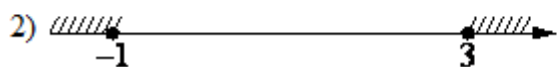
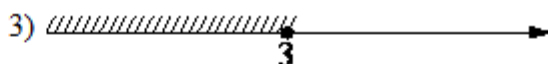
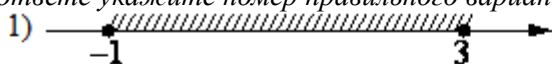
23. На каком из рисунков изображено решение неравенства  $81x^2 < 16$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



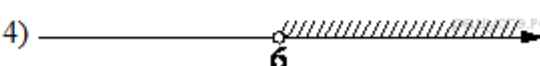
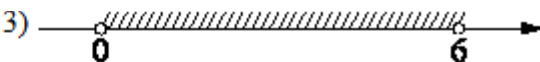
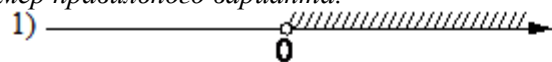
24. Решите неравенство  $x^2 - 36 > 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1)  $(-\infty; +\infty)$    2)  $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$    3)  $(-6; 6)$    4) нет решений

25. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ?  
В ответе укажите номер правильного варианта.

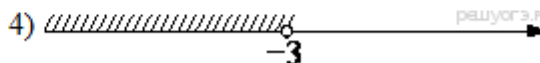
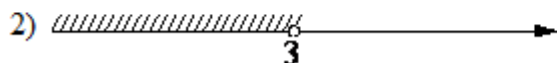
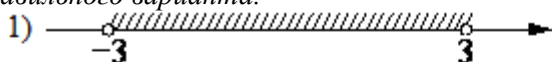


26. На каком из рисунков изображено решение неравенства  $6x - x^2 > 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.

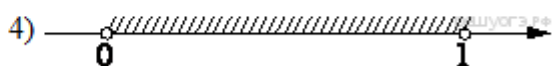
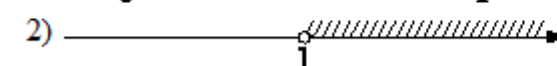
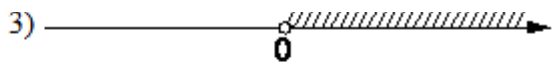
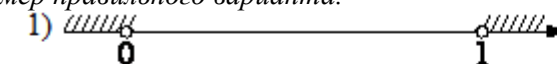


27. Решите неравенство  $x^2 - 25 < 0$ . В ответе укажите номер правильного варианта.  
1)  $(-\infty; +\infty)$  2) нет решений 3)  $(-5; 5)$  4)  $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$

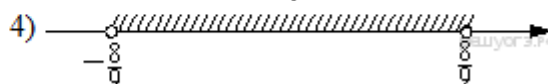
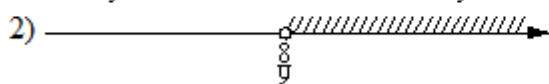
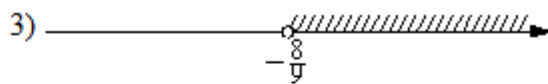
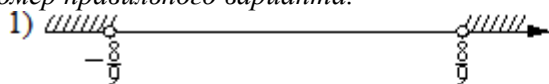
28. На каком рисунке изображено решение неравенства  $x^2 < 9$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



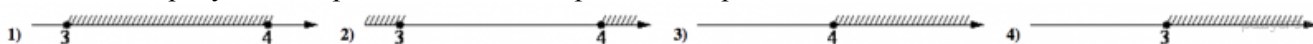
29. На каком из рисунков изображено решение неравенства  $x - x^2 < 0$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



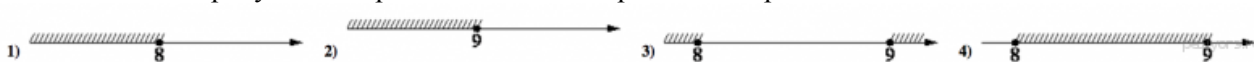
30. На каком из рисунков изображено решение неравенства  $81x^2 > 64$ ? В ответе укажите номер правильного варианта.



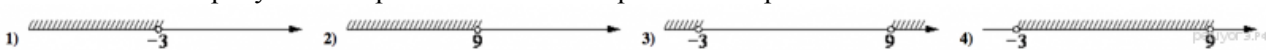
31. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ ?



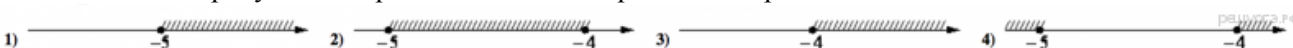
32. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 17x + 72 \leq 0$ ?



33. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 - 6x - 27 < 0$ ?



34. На каком рисунке изображено множество решений неравенства  $x^2 + 9x + 20 \geq 0$ ?



## **Тема 6. Системы уравнений и неравенств**

### *Системы уравнений*

Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких (или одной) переменных.

Другими словами, если задано несколько уравнений с одной, двумя или больше неизвестными, и все эти уравнения (равенства) должны одновременно выполняться, такую группу уравнений мы называем системой.

Объединяем уравнения в систему с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} \text{Уравнение 1} \\ \text{Уравнение 2} \end{cases}$$

### *Система уравнений и методы ее решения*

#### Метод подстановки

Это самый простой метод, но зачастую – самый трудоемкий. Идея проста – нужно в одном из уравнений выразить одну переменную через другие, а затем полученное выражение подставить в остальные уравнения вместо этой переменной.

Затем точно так же выражаем и подставляем другую переменную и т.д., пока не получим уравнение с одной переменной. После его решения и нахождения одной из переменных - последовательно возвращаемся к ранее выраженным, подставляя найденные значения.

Рассмотрим на примере.

**Пример 25.** Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

Из второго уравнения очень просто выразить  $y$ :  $3x-y=7 \Rightarrow y=3x-7$

Теперь подставим то, что получилось вместо  $y$  в первое уравнение:  $2x+3y=12 \Leftrightarrow 2x+3(3x-7)=12$ . Мы получили уравнение с одной неизвестной, которое очень просто решить:  $2x+3(3x-7)=12$

$$2x+3 \cdot 3x-3 \cdot 7=12$$

$$2x+9x-21=12$$

$$11x=33$$

$$x=3$$

А теперь вернемся к выраженному  $y$  и подставим в него полученное значение  $x$ :

$$y=3x-7=3 \cdot 3-7=2$$

Итак, ответ:  $x=3$ ;  $y=2$ .

Ответ, кстати, принято записывать как координаты, то есть в таком виде:  $(x; y)$

То есть ответ в нашем примере запишется так:  $(3;2)$

#### Метод сложения

Метод сложения основан на следующем: если сложить левые части двух (или больше) уравнений, полученное выражение будет равно сложенным правым частям этих

же уравнений. То есть: 
$$\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow a+c=b+d$$

**Пример 26.** Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2x+y=12 \\ 3x-y=3 \end{cases}$$

Сложим эти уравнения (левые части друг с другом, и правые – тоже друг с другом):

$$2x+y+3x-y=15 \Leftrightarrow 5x=15 \Leftrightarrow x=3$$

$y$  просто уничтожился в результате сложения. Это и была цель всего действия: складываем уравнения только тогда, когда при этом получим более простое уравнение.

Остается теперь только подставить в любое уравнение вместо  $x$  число 3:

$$\begin{cases} 2x+y=12 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3+y=12 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=3 \end{cases}$$

Ответ:  $(3; 6)$ .

**Пример 27.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4x+5y=23 \end{cases}$  :

Очевидно, здесь сложение ничего не даст. Придется решать другим методом? Нет! Иначе метод сложения был бы полезен слишком редко. Мы ведь можем умножать любое уравнение на любое ненулевое число? Так давай умножим первое уравнение на такое число, чтобы потом при сложении какая-то переменная исчезла. Лучше всего умножить на (-2):

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4x+5y=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x-6y=-26 \\ 4x+5y=23 \end{cases}$$

Теперь можно складывать:

$$-4x-6y+4x+5y = -26+23 \Leftrightarrow -y = -3 \Leftrightarrow y=3$$

Теперь подставим  $y=3$  в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 2x+3 \cdot 3=13 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}$$

Ответ: (2; 3).

### Системы неравенств

Система неравенств состоит из нескольких неравенств с одной переменной. Эти неравенства объединяются фигурной скобкой (так же, как и уравнения в системах уравнений). Задача состоит в том, чтобы найти все общие решения заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы становится верным числовым неравенством, называют решением системы неравенств.

Множество всех решений системы неравенств является общим решением (чаще всего - просто решением системы неравенств.)

$\begin{cases} 2x-1>3 \\ 3x-2<11 \end{cases}$  означает, что неравенства  $2x-1>3$  и  $3x-2<11$  образуют систему неравенств.

Решить систему неравенств - это найти все её решения.

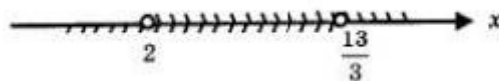
**Пример 28.** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-1>3 \\ 3x-2<11 \end{cases}$$

1. Решив первое неравенство, получаем  $2x>4$ ,  $x>2$

2. Решив второе неравенство, получаем  $3x<13$ ,  $x<\frac{13}{3}$

3. Полученные промежутки отметим на оси координат. Для каждого возьмём свою штриховку (верхнюю или нижнюю).



4. Решение системы уравнений, это пересечение штриховок, т.е. промежутков, на котором штриховки совпадают.

В данном случае получаем ответ:  $(2; \frac{13}{3})$ .

### Задания для самостоятельного выполнения

#### Системы уравнений

1. Решите систему уравнений  $\begin{cases} 4x-2y=2, \\ 2x+y=5. \end{cases}$  В ответе запишите сумму решений системы.

2. Решите систему уравнений  $\begin{cases} 3x - y = -1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$  В ответе запишите сумму решений системы.

3. Решите систему уравнений  $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ 4x - y = 7. \end{cases}$  В ответе запишите сумму решений системы.

4. Решите систему уравнений  $\begin{cases} 5x - y = 7, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$  В ответе запишите сумму решений системы.

5. Решите систему уравнений  $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$  В ответе запишите сумму решений системы.

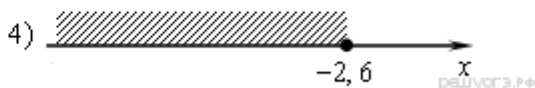
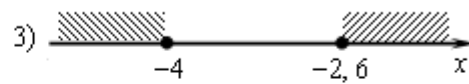
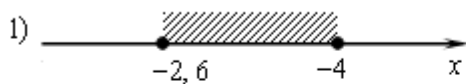
6. Решите систему уравнений  $\begin{cases} 4x + y = 10, \\ x + 3y = -3. \end{cases}$  В ответе запишите сумму решений системы.

#### Системы неравенств

1. Решите систему неравенств

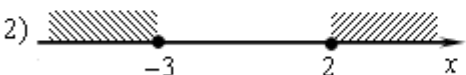
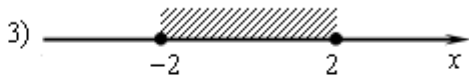
$$\begin{cases} 5x + 13 \leq 0, \\ x + 5 \geq 1. \end{cases}$$

На каком рисунке изображено множество её решений? В ответе укажите номер правильного варианта.



2. Решите систему неравенств  $\begin{cases} x^2 \leq 4, \\ x + 3 \geq 0. \end{cases}$

На каком из рисунков изображено множество её решений? В ответе укажите номер правильного варианта.



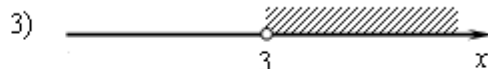
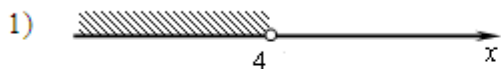
3. Найдите наибольшее значение  $x$ , удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 2x + 12 \geq 0, \\ x + 5 \leq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

4. Решите систему неравенств

На каком рисунке изображено множество её решений? В ответе укажите номер правильного варианта.



2) система не имеет решений

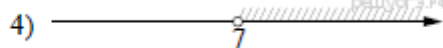
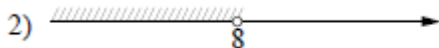


5. На каком рисунке изображено множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} -35 + 5x > 0, \\ 6 - 3x > -18? \end{cases}$$



3) система не имеет решений



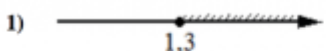
6. Укажите решение системы неравенств:

$$\begin{cases} x + 3 \geq -2, \\ x + 1,1 \geq 0. \end{cases}$$



7. Укажите решение системы неравенств:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ x - 0,3 \geq 1. \end{cases}$$



8. Найдите наибольшее значение  $x$ , удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 6x + 18 \leq 0, \\ x + 8 \geq 2. \end{cases}$$

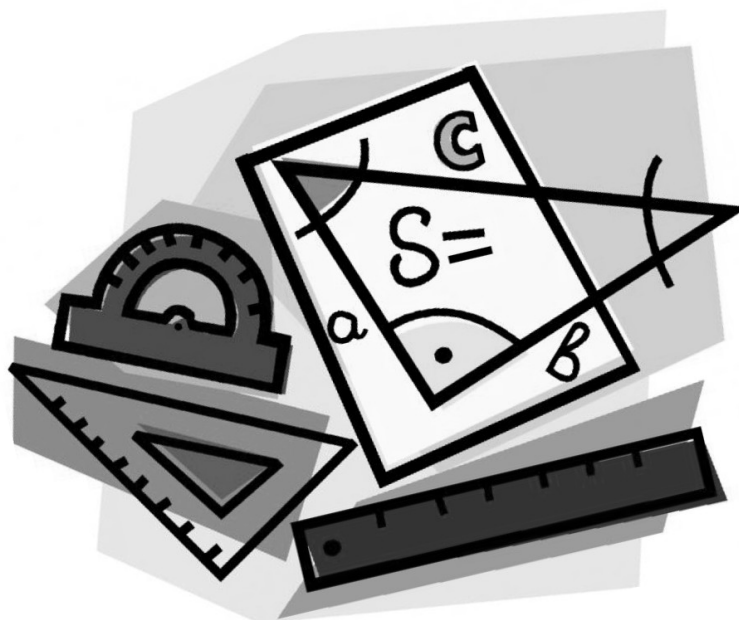
9. Найдите наибольшее значение  $x$ , удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 5x + 15 \leq 0, \\ x + 5 \geq 1. \end{cases}$$





# Модуль «Геометрия»



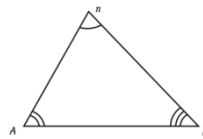
*Тема 7. Треугольники*

Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки - его сторонами.

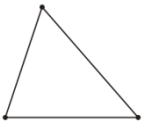
На рисунке:

A, B, C - вершины треугольника.

AB, BC и AC – стороны треугольника.

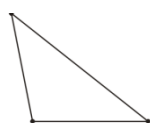
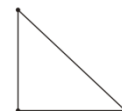


Виды треугольников по величине углов:

1.  Остроугольный треугольник - такой треугольник, в котором все углы меньше  $90^\circ$ , т.е. острые.

прямой угол.

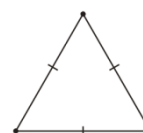
2. Прямоугольный треугольник - треугольник, имеющий



3. Тупоугольный треугольник - треугольник, содержащий тупой угол, т.е. угол от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ .

Виды треугольников по соотношению

1. Равносторонний (правильный) треугольник – это такой треугольник, у которого все стороны и углы равны.

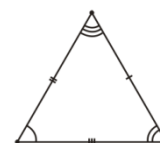


сторон:



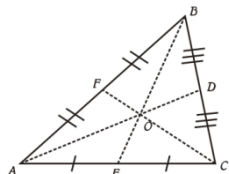
2. Равнобедренный треугольник - это такой треугольник, у которого две стороны равны. Равные стороны называются боковыми. Третья сторона называется основанием.

3. Разносторонний треугольник – это такой треугольник, у которого длины всех сторон разные.



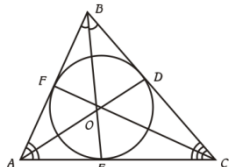
**У** Медиана, биссектриса, высота

Медиана – это отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке O, эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. **Медиана делит сторону пополам**



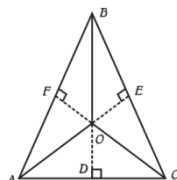
**У**

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне этого треугольника. **Биссектриса делит угол пополам**



**У**

Высота треугольника - это перпендикуляр, опущенный из любой вершины на противоположную сторону (или её продолжение). Эта сторона называется основанием треугольника.



**Пример 29.** В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота BH. Известно, что AC = 84 и BC = BM. Найдите AH.

Решение:

$$AH = AM + MH$$



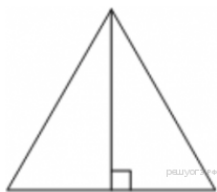
Так как  $BM$  – медиана, то  $AM=MC= \frac{AC}{2} = \frac{84}{2} = 42$

Так как  $BC = BM$ , следовательно треугольник  $MBC$  – равнобедренный,  $BH$  в нем является медианой, биссектрисой и высотой,  $MH = \frac{MC}{2} = \frac{42}{2} = 21$

$AN=AM+MH= 42 + 21 = 63$

Ответ. 63

**Пример 30.** Сторона равностороннего треугольника равна  $16\sqrt{3}$ . Найдите высоту этого треугольника.



*Решение:*

Так как треугольник равносторонний, то все его стороны равны  $16\sqrt{3}$ . В равностороннем треугольнике высота является и медианой и

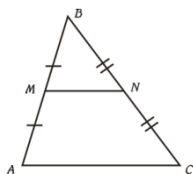
биссектрисой, отсюда основание треугольника  $\frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора найдем катет (высоту):  
 $\sqrt{(16\sqrt{3})^2 - (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{768 - 192} = \sqrt{576} = 24$

Ответ. 24

*Основные свойства треугольников:* **У**

- 1) Сумма всех углов в треугольнике равна  $180^\circ$ .
- 2) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
- 3) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, одновременно является медианой и биссектрисой.
- 4) В равностороннем треугольнике все углы по  $60^\circ$ .
- 5) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним.
- 6) Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.



$MN$  - средняя линия, так как соединяет середины соседних сторон.

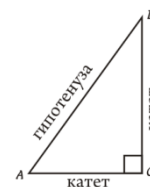
$MN \parallel AC$ ,  $MN = \frac{AC}{2}$  **У**

*Прямоугольный треугольник*

В прямоугольном треугольнике катетами называются две стороны треугольника, которые образуют прямой угол. Гипотенузой называется сторона, лежащая напротив прямого угла.

*Некоторые свойства прямоугольного треугольника:*

- 1) Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна  $90$  градусов.
- 2) Если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен  $45$  градусов, то этот треугольник равнобедренный.
- У** 3) Катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в  $30$  градусов, равен половине гипотенузы.
- 4) Катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в  $60$  градусов, равен малому катету этого треугольника, умноженному на  $\sqrt{3}$ .
- 5) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, равна ее половине и радиусу описанной окружности ( $R$ ).
- 6) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, делит треугольник на два равнобедренных треугольника, основаниями которых являются катеты данного треугольника.



**Пример 31.**

Один острый угол прямоугольного треугольника на  $44^\circ$  больше другого острого угла. Найдите больший острый угол.

*Решение:*

В прямоугольном треугольнике  $ABC$   $\angle A$  и  $\angle B$  – острые.

Пусть  $\angle A = x$ , тогда  $\angle B = (x + 44)$ .

Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна  $90$  градусов.

На основании этого правила, составим и решим уравнение:

$$x + x + 44 = 90$$

$$2x + 44 = 90$$

$$2x = 90 - 44$$

$$2x = 46$$

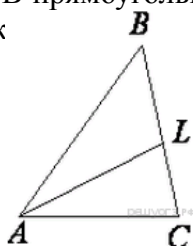
$$x = 23$$

Угол  $B$  больший в этом треугольнике, через « $x$ » он записывался как,  $x + 44$ , следовательно,  $\angle B = 23 + 44 = 67^\circ$ .

**У**

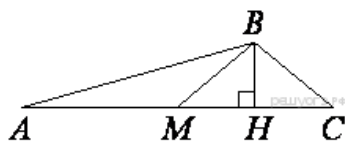
*Теорема Пифагора*

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна к нузы.  $AC^2 + BC^2 = AB^2$

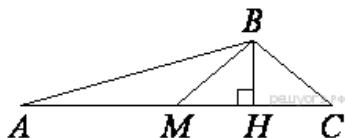


**Задания для самостоятельного выполнения**

*Треугольники общего вида*



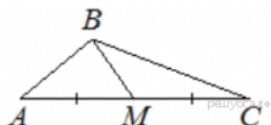
1. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AL$ , угол  $ALC$  равен  $112^\circ$ , угол  $ABC$  равен  $106^\circ$ . Найдите угол  $ACB$ . Ответ дайте в градусах.



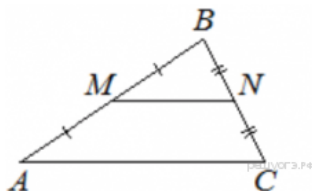
2. В треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $BM$  и высота  $BH$ . Известно, что  $AC = 84$  и  $BC = BM$ . Найдите  $AH$ .

3. В треугольнике  $ABC$   $BM$  — медиана и  $BH$  — высота.

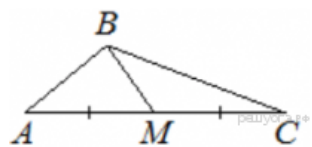
Известно, что  $AC = 216$ ,  $HC = 54$  и  $\angle ACB = 40^\circ$ . Найдите угол  $AMB$ . Ответ дайте в градусах.



4. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AC = 54$ ,  $BM$  — медиана,  $BM = 43$ . Найдите  $AM$ .



5. Точки  $M$  и  $N$  являются серединами сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , сторона  $AB$  равна 66, сторона  $BC$  равна 37, сторона  $AC$  равна 74. Найдите  $MN$

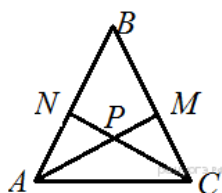


6. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AC = 16$ ,  $BM$  — медиана,  $BM = 12$ . Найдите  $AM$ .

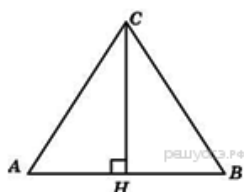
7. В треугольнике два угла равны  $36^\circ$  и  $73^\circ$ . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

8. В треугольнике два угла равны  $43^\circ$  и  $88^\circ$ . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

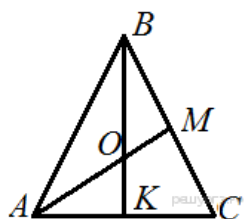
#### Равнобедренные и равносторонние треугольники



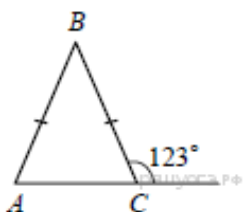
1. В равностороннем треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $CN$  и  $AM$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите  $\angle MPN$ .



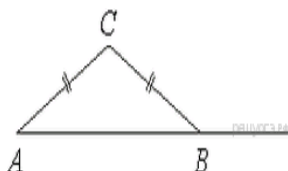
2. В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $AC = BC$ . Найдите  $AC$ , если высота  $CH = 12$ ,  $AB = 10$ .



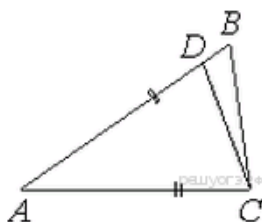
3. В равностороннем треугольнике  $ABC$  медианы  $BK$  и  $AM$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите  $\angle AOK$ .



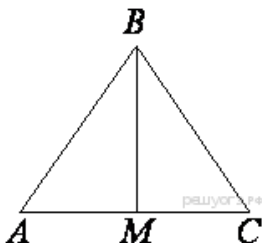
4. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  внешний угол при вершине  $C$  равен  $123^\circ$ . Найдите величину угла  $ABC$ . Ответ дайте в градусах.



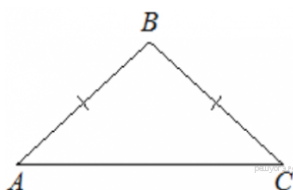
5. В треугольнике  $ABC$   $AC = BC$ . Внешний угол при вершине  $B$  равен  $146^\circ$ . Найдите угол  $C$ . Ответ дайте в градусах.



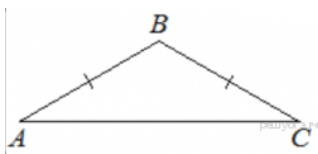
6. Точка  $D$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  выбрана так, что  $AD = AC$ . Известно, что  $\angle CAB = 80^\circ$  и  $\angle ACB = 59^\circ$ . Найдите угол  $DCB$ . Ответ дайте в градусах.



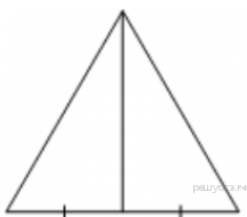
7. В треугольнике  $ABC$   $AB = BC = 53$ ,  $AC = 56$ . Найдите длину медианы  $BM$ .



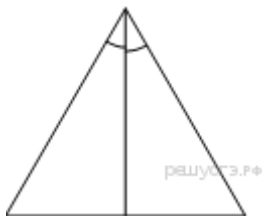
8. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = 108^\circ$ . Найдите угол  $BCA$ . Ответ дайте в градусах.



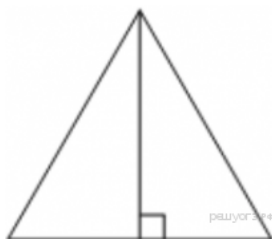
9. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = 124^\circ$ . Найдите угол  $BCA$ . Ответ дайте в градусах.



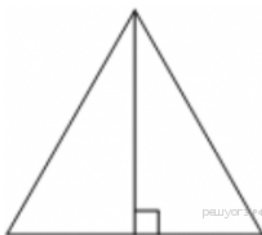
10. Сторона равностороннего треугольника равна  $10\sqrt{3}$ . Найдите медиану этого треугольника.



11. Биссектриса равностороннего треугольника равна  $13\sqrt{3}$ . Найдите сторону этого треугольника.

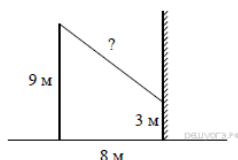


12. Сторона равностороннего треугольника равна  $16\sqrt{3}$ . Найдите высоту этого треугольника

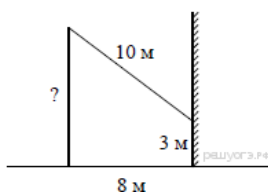


13. Высота равностороннего треугольника равна  $11\sqrt{3}$ . Найдите сторону этого треугольника.

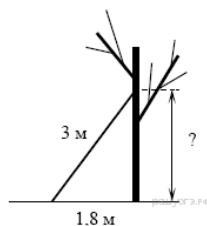
## Теорема Пифагора



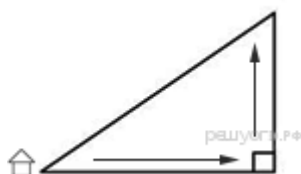
1. От столба высотой 9 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Расстояние от дома до столба 8 м. Вычислите длину провода.



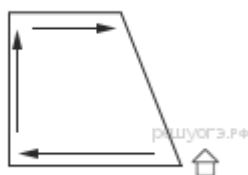
2. От столба к дому натянут провод длиной 10 м, который закреплён на стене дома на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Вычислите высоту столба, если расстояние от дома до столба равно 8 м.



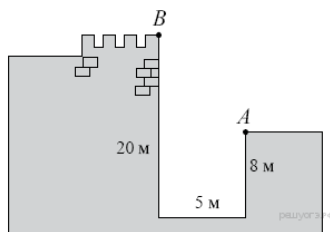
3. Лестницу длиной 3 м прислонили к дереву. На какой высоте (в метрах) находится верхний её конец, если нижний конец отстоит от ствола дерева на 1,8 м?



4. Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошёл 600 м. На каком расстоянии (в метрах) от дома оказался мальчик?



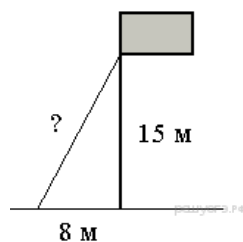
5. Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла ещё 100 м. На каком расстоянии (в метрах) от дома оказалась девочка?



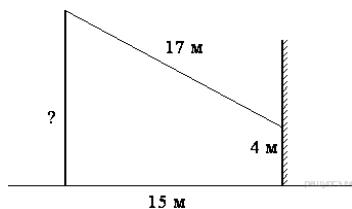
6. Глубина крепостного рва равна 8 м, ширина 5 м, а высота крепостной стены от её основания 20 м. Длина лестницы, по которой можно взобраться на стену, на 2 м больше, чем расстояние от края рва до верхней точки стены (см. рис.). Найдите длину лестницы.



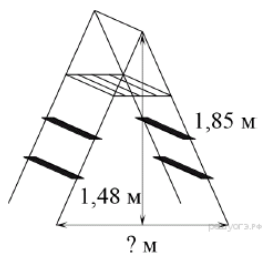
7. Лестница соединяет точки  $A$  и  $B$  и состоит из 35 ступеней. Высота каждой ступени равна 14 см, а длина — 48 см. Найдите расстояние между точками  $A$  и  $B$  (в метрах).



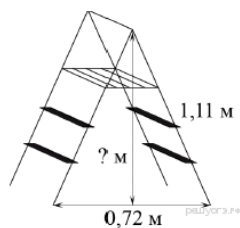
8. Точка крепления троса, удерживающего флагшток в вертикальном положении, находится на высоте 15 м от земли. Расстояние от основания флагштока до места крепления троса на земле равно 8 м. Найдите длину троса.



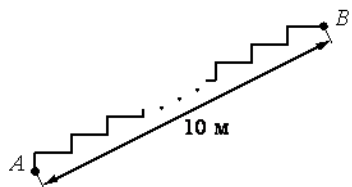
9. От столба к дому натянут провод длиной 17 м, который закреплён на стене дома на высоте 4 м от земли (см. рисунок). Вычислите высоту столба, если расстояние от дома до столба равно 15 м.



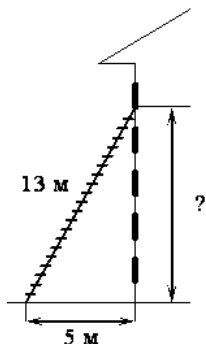
10. Длина стремянки в сложенном виде равна 1,85 м, а её высота в разложенном виде составляет 1,48 м. Найдите расстояние (в метрах) между основаниями стремянки в разложенном виде.



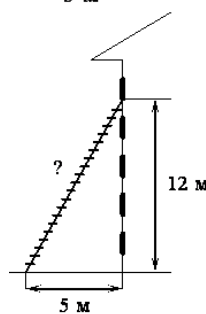
11. Длина стремянки в сложенном виде равна 1,11 м, а расстояние между её основаниями в разложенном виде составляет 0,72 м. Найдите высоту (в метрах) стремянки в разложенном виде.



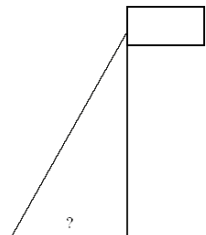
12. Лестница соединяет точки А и В. Высота каждой ступени равна 14 см, а длина — 48 см. Расстояние между точками А и В составляет 10 м. Найдите высоту, на которую поднимается лестница (в метрах).



13. Пожарную лестницу длиной 13 м приставили к окну пятого этажа дома. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 5 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах

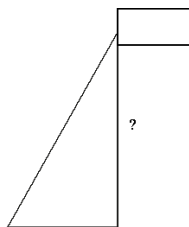


14. Пожарную лестницу приставили к окну, расположенному на высоте 12 м от земли. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 5 м. Какова длина лестницы? Ответ дайте в метрах

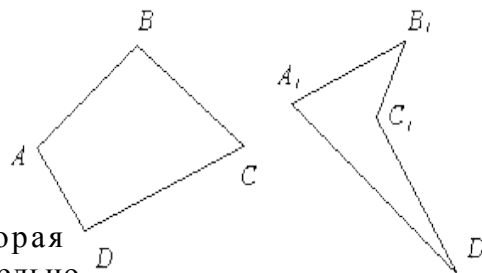


15. Точка крепления троса, удерживающего флагшток в вертикальном положении, находится на высоте 6,3 м от земли. Длина троса равна 6,5 м. Найдите расстояние от точки основания флагштока до места крепления троса на земле. Ответ дайте в метрах.





16. Расстояние от основания флагштока до места крепления троса на земле равно 1,6 м. Длина троса равна 3,4 м. Найдите расстояние от земли до точки крепления троса, удерживающего флагшток в вертикальном положении. Ответ дайте в метрах.



### Тема 8. Четырёхугольники

Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а соединяющие их отрезки не пересекаются.

Две несмежные стороны четырёхугольника называются противоположными. Две вершины, не являющиеся соседними, называются также противоположными.

Четырёхугольники бывают выпуклые (как  $ABCD$ ) и невыпуклые ( $A_1B_1C_1D_1$ ).

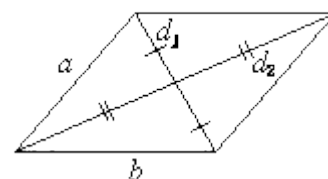
Виды четырёхугольников

#### Параллелограмм

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма

- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали точкой пересечения делятся пополам;
- сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна  $180^\circ$ ;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон:  $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ .



Признаки параллелограмма

- Четырёхугольник является параллелограммом, если:
- Две его противоположные стороны равны и параллельны.
- Противоположные стороны попарно равны.
- Противоположные углы попарно равны.
- Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

#### Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а непараллельные стороны — *боковыми сторонами*. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией*.

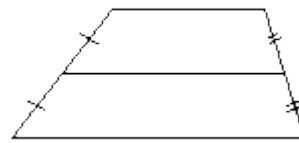
Трапеция называется *равнобедренной* (или *равнобокой*), если ее боковые стороны равны.

Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной*.

Свойства трапеции

- ее средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме;
- если трапеция равнобокая, то ее диагонали равны и углы при основании равны;
- если трапеция равнобокая, то около нее можно описать окружность;
- если сумма оснований равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность.

Признаки трапеции



- Четырехугольник является трапецией, если его параллельные стороны не равны

### Прямоугольник

*Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

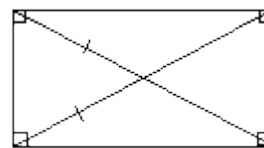
*Свойства прямоугольника*

- все свойства параллелограмма;
- диагонали равны.

*Признаки прямоугольника*

Параллелограмм является прямоугольником, если:

- Один из его углов прямой.
- Его диагонали равны.



### Ромб

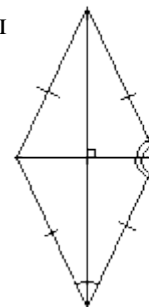
*Ромбом* называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

*Свойства ромба*

- все свойства параллелограмма;
- диагонали перпендикулярны;
- диагонали являются биссектрисами его углов.

*Признаки ромба*

- Параллелограмм является ромбом, если:
- Две его смежные стороны равны.
- Его диагонали перпендикулярны.
- Одна из диагоналей является биссектрисой его угла.



### Квадрат

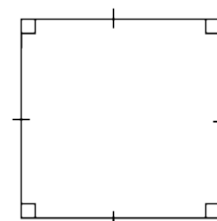
*Квадратом* называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

*Свойства квадрата*

- все углы квадрата прямые;
- диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.

*Признаки квадрата*

- Прямоугольник является квадратом, если он обладает каким-нибудь признаком ромба.

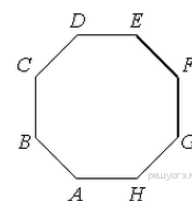


### Задания для самостоятельного выполнения

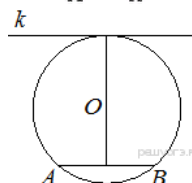
#### Многоугольники

1. Сумма трех углов выпуклого четырехугольника равна  $300^\circ$ . Найдите четвертый угол. Ответ дайте в градусах.
2. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = BC$ ,  $AD = CD$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle D = 110^\circ$ . Найдите угол  $A$ . Ответ дайте в градусах.
3. Углы выпуклого четырехугольника относятся как 1:2:3:4. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.
4. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны  $82^\circ$  и  $58^\circ$ . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.
5. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $136^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $82^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ . Ответ дайте в градусах.

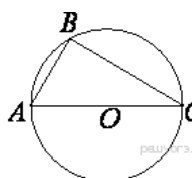
6.  $ABCDEFGH$  — правильный восьмиугольник. Найдите угол  $EFG$ . Ответ дайте в градусах.



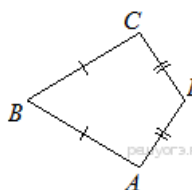
7. Радиус окружности с центром в точке  $O$  равен 85, длина хорды  $AB$  равна 80 (см. рисунок). Найдите расстояние от хорды  $AB$  до параллельной ей касательной  $k$ .



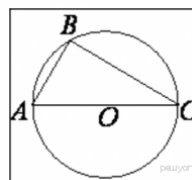
8. Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  проходит через центр описанной около него окружности. Найдите  $\angle C$ , если  $\angle A = 75^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



9. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = BC$ ,  $AD = CD$ ,  $\angle B = 77^\circ$ ,  $\angle D = 141^\circ$ . Найдите угол  $A$ . Ответ дайте в градусах.



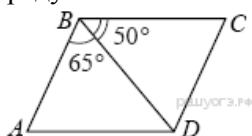
10. Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  проходит через центр описанной около него окружности. Найдите  $\angle C$ , если  $\angle A = 81^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



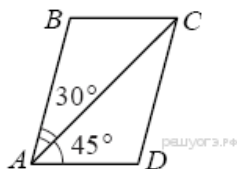
### Параллелограмм

1. Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна  $40^\circ$ . Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

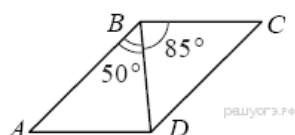
2. Один угол параллелограмма в два раза больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.



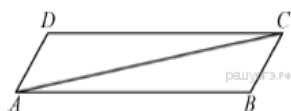
3. Диагональ  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $65^\circ$  и  $50^\circ$ . Найдите меньший угол параллелограмма.



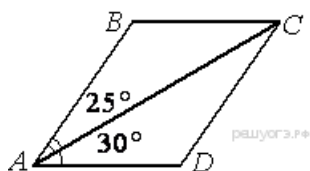
4. Диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.



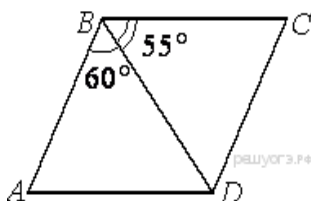
5. Диагональ  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $50^\circ$  и  $85^\circ$ . Найдите меньший угол параллелограмма.



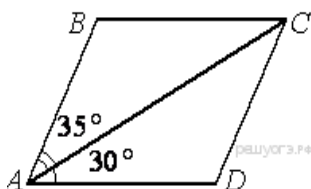
6. В параллелограмме  $ABCD$  проведена диагональ  $AC$ . Угол  $DAC$  равен  $47^\circ$ , а угол  $CAB$  равен  $11^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма  $ABCD$ . Ответ дайте в градусах.



7. Диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $25^\circ$  и  $30^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.



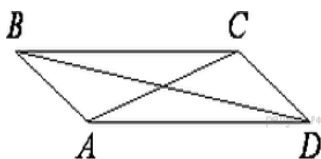
8. Диагональ  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $60^\circ$  и  $55^\circ$ . Найдите меньший угол параллелограмма.



9. Диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $35^\circ$  и  $30^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма.

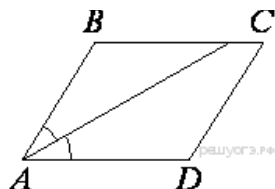
10. На продолжении стороны  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  за точкой  $D$  отмечена точка  $E$  так, что  $DC = DE$ . Найдите больший угол параллелограмма  $ABCD$ , если  $\angle DEC = 53^\circ$ . Ответ дайте в градусах.

11. В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 6.

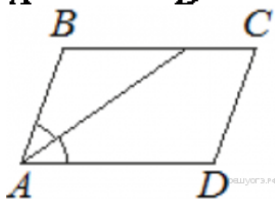


12. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  в 2 раза больше стороны  $AB$  и  $\angle ACD = 104^\circ$ . Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

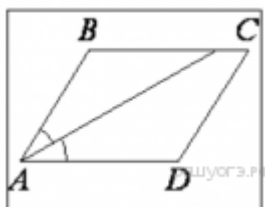
13. Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найдите периметр параллелограмма, если  $BK = 7$ ,  $CK = 12$ .



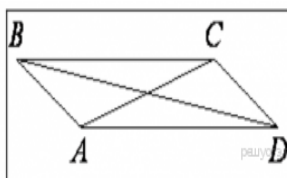
14. Найдите величину острого угла параллелограмма  $ABCD$ , если биссектриса угла  $A$  образует со стороной  $BC$  угол, равный  $15^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



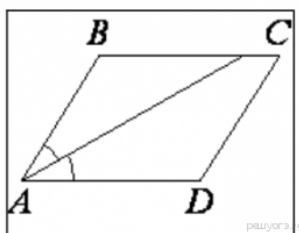
15. Найдите острый угол параллелограмма  $ABCD$ , если биссектриса угла  $A$  образует со стороной  $BC$  угол, равный  $33^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



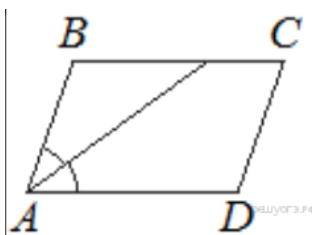
16. Найдите величину острого угла параллелограмма  $ABCD$ , если биссектриса угла  $A$  образует со стороной  $BC$  угол, равный  $31^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



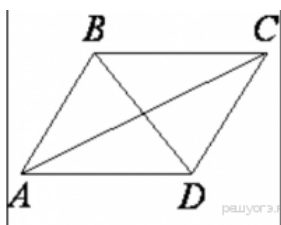
17. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  в 2 раза больше стороны  $AB$  и  $\angle ACD = 169^\circ$ . Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



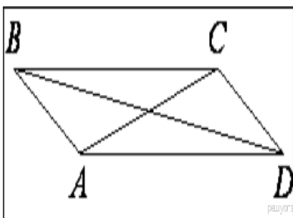
18. Найдите величину острого угла параллелограмма  $ABCD$ , если биссектриса угла  $A$  образует со стороной  $BC$  угол, равный  $14^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



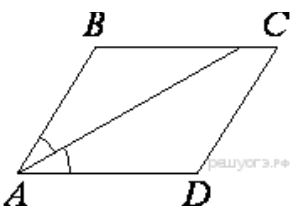
19. Найдите острый угол параллелограмма  $ABCD$ , если биссектриса угла  $A$  образует со стороной  $BC$  угол, равный  $41^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



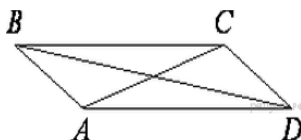
20. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  в 2 раза больше стороны  $AB$  и  $\angle ACD = 21^\circ$ . Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



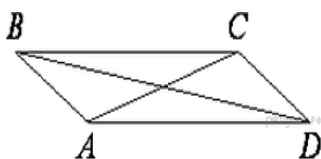
21. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  в 2 раза больше стороны  $AB$  и  $\angle ACD = 111^\circ$ . Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



22. Найдите величину острого угла параллелограмма  $ABCD$ , если биссектриса угла  $A$  образует со стороной  $BC$  угол, равный  $13^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



23. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  в 2 раза больше стороны  $AB$  и  $\angle ACD = 17^\circ$ . Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

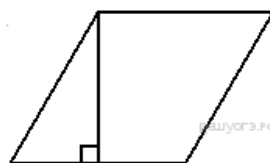


24. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  в 2 раза больше стороны  $AB$  и  $\angle ACD = 63^\circ$ . Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ромб

1. Сторона ромба равна 34, а острый угол равен  $60^\circ$ . Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?

Перечислите эти длины в ответе через точку с запятой в порядке возрастания.



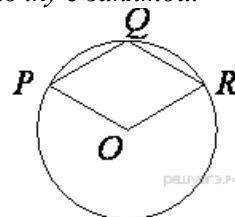
2. Площадь ромба равна 27, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.



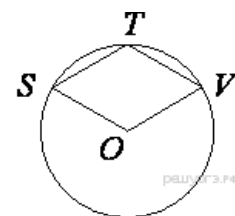
3. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 19, а одна из диагоналей ромба равна 76. Найдите углы ромба.

В ответе запишите величины различных углов в порядке возрастания через точку с запятой.

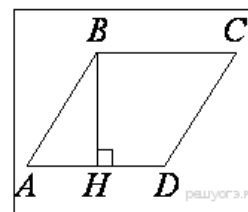
4. Точка  $O$  — центр окружности, на которой лежат точки  $P, Q$  и  $R$  таким образом, что  $OPQR$  — ромб. Найдите угол  $ORQ$ . Ответ дайте в градусах.



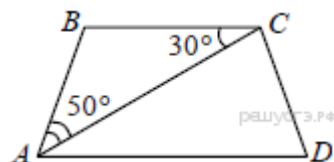
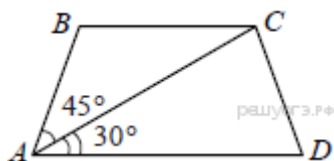
5. Точка  $O$  — центр окружности, на которой лежат точки  $S, T$  и  $V$  таким образом, что  $OSTV$  — ромб. Найдите угол  $STV$ . Ответ дайте в градусах.



6. Высота  $BH$  ромба  $ABCD$  делит его сторону  $AD$  на отрезки  $AH = 44$  и  $HD = 11$ . Найдите площадь ромба.



### Трапеция



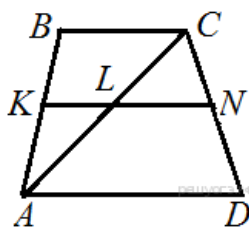
1. Найдите больший угол равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $AD$  и боковой стороной  $AB$  углы, равные  $30^\circ$  и  $45^\circ$  соответственно.

2. Найдите угол  $ADC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $BC$  и боковой стороной  $AB$  углы, равные  $30^\circ$  и  $50^\circ$  соответственно.

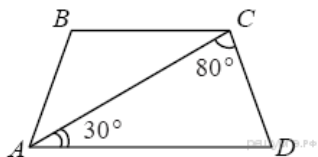
3. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна  $140^\circ$ . Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

4. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна  $220^\circ$ . Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

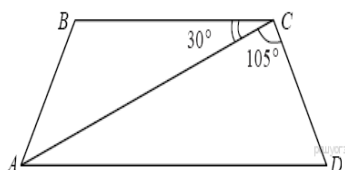
5. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если два ее угла относятся как 1:2. Ответ дайте в градусах.



6. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.



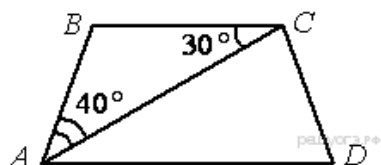
7. Найдите угол  $ABC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $AD$  и боковой стороной  $CD$  углы, равные  $30^\circ$  и  $80^\circ$  соответственно.



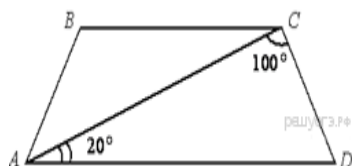
8. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $BC$  и боковой стороной  $CD$  углы, равные  $30^\circ$  и  $105^\circ$  соответственно.



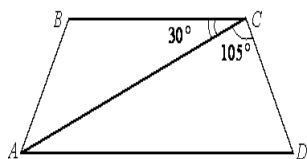
9. Тангенс острого угла прямоугольной трапеции равен  $\frac{5}{6}$ . Найдите её большее основание, если меньшее основание равно высоте и равно 15.



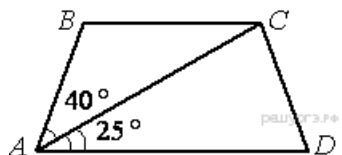
10. Найдите угол  $ADC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $BC$  и боковой стороной  $AB$  углы, равные  $30^\circ$  и  $40^\circ$  соответственно.



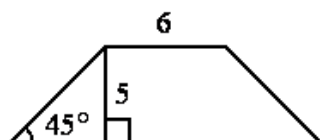
11. Найдите угол  $ABC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $AD$  и боковой стороной  $CD$  углы, равные  $20^\circ$  и  $100^\circ$  соответственно.



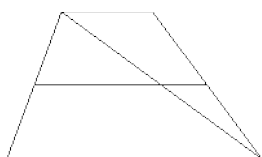
12. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $BC$  и боковой стороной  $CD$  углы, равные  $30^\circ$  и  $105^\circ$  соответственно.



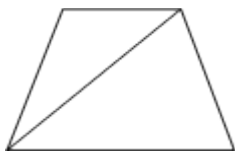
13. Найдите больший угол равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если диагональ  $AC$  образует с основанием  $AD$  и боковой стороной  $AB$  углы, равные  $25^\circ$  и  $40^\circ$  соответственно.



14. В равнобедренной трапеции известны высота, меньшее основание и угол при основании. Найдите большее основание.



15. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

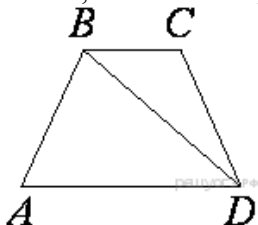


**16.** Основания равнобедренной трапеции равны 50 и 104, боковая сторона 45. Найдите длину диагонали трапеции.

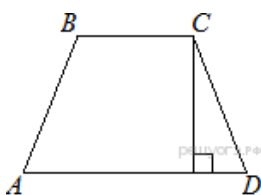
**17.** Около трапеции, один из углов которой равен  $49^\circ$ , описана окружность. Найдите остальные углы трапеции. *Запишите величины углов в ответ через точку с запятой в порядке неубывания.*

**18.** В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 24, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

**19.** Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  при боковой стороне  $AB$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $F$ . Найдите  $AB$ , если  $AF = 24$ ,  $BF = 32$ .



**20.** В трапеции  $ABCD$   $AB = CD$ ,  $\angle BDA = 49^\circ$  и  $\angle BDC = 13^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ . Ответ дайте в градусах.



**21.** Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины  $C$ , делит основание  $AD$  на отрезки длиной 1 и 5. Найдите длину основания  $BC$ .



## Тема 9. Площади фигур

### Формулы площади треугольника

1. Формула площади треугольника по стороне и высоте

Площадь треугольника равна половине произведения длины стороны треугольника на длину проведенной к этой стороне высоты  $S = \frac{1}{2} a h$

2. Формула площади треугольника по трем сторонам

Формула Герона  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

3. Формула площади треугольника по двум сторонам и углу между ними

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон умноженного на синус угла между ними.  $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

4. Формула площади треугольника по трем сторонам и радиусу описанной окружности

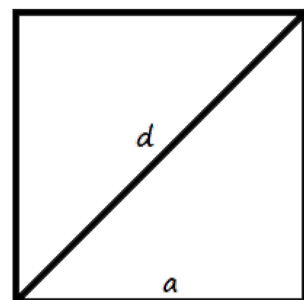
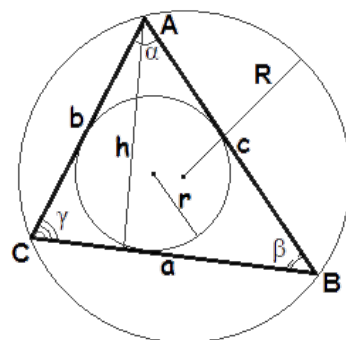
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

5. Формула площади треугольника по трем сторонам и радиусу вписанной окружности

Площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.  $S = p \cdot r$

где  $S$  - площадь треугольника,  
 $a, b, c$  - длины сторон треугольника,  
 $h$  - высота треугольника,  
 $\alpha$  - угол между сторонами  $a$  и  $b$ ,  
 $r$  - радиус вписанной окружности,  
 $R$  - радиус описанной окружности,

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad - \text{ полупериметр треугольника.}$$



### Формулы площади квадрата

1. Формула площади квадрата по длине стороны

Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны  $S = a^2$

2. Формула площади квадрата по длине диагонали

Площадь квадрата равна половине квадрата длины его диагонали  $S = \frac{1}{2} d^2$

где  $S$  - Площадь квадрата,

$a$  - длина стороны квадрата,

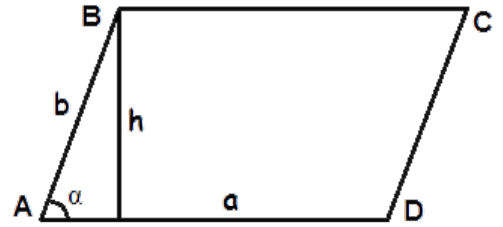
$d$  - длина диагонали квадрата.

### Формула площади прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон

$$S = a \cdot b$$

где  $S$  - Площадь прямоугольника,  
 $a, b$  - длины сторон прямоугольника.



#### Формулы площади параллелограмма

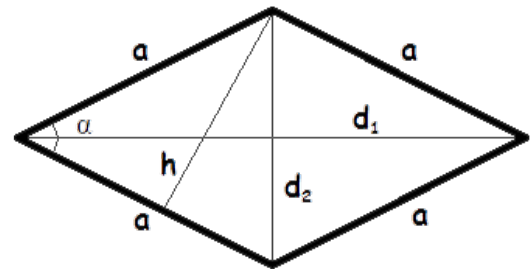
1. Формула площади параллелограмма по длине стороны и высоте

Площадь параллелограмма равна произведению длины его стороны и длины опущенной на эту сторону высоты  $S = a \cdot h$

2. Формула площади параллелограмма по двум сторонам и углу между ними

Площадь параллелограмма равна произведению длин его сторон умноженному на синус угла между ними  $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

где  $S$  - Площадь параллелограмма,  
 $a, b$  - длины сторон параллелограмма,  
 $h$  - длина высоты параллелограмма,  
 $\alpha$  - угол между сторонами параллелограмма.



#### Формулы площади ромба

1. Формула площади ромба по длине стороны и высоте

Площадь ромба равна произведению длины его стороны и длины опущенной на эту сторону высоты  $S = a \cdot h$

2. Формула площади ромба по длине стороны и углу

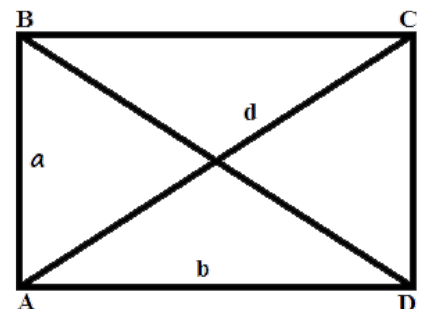
Площадь ромба равна произведению квадрата длины его стороны и синуса угла между сторонами ромба  $S = a^2 \cdot \sin \alpha$

3. Формула площади ромба по длинам его диагоналей

Площадь ромба равна половине произведению длин его диагоналей.

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

где  $S$  - Площадь ромба,  
 $a$  - длина стороны ромба,  
 $h$  - длина высоты ромба,  
 $\alpha$  - угол между сторонами ромба,  
 $d_1, d_2$  - длины диагоналей.



#### Формулы площади трапеции

1. Формула площади трапеции по длине основания и высоте

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту

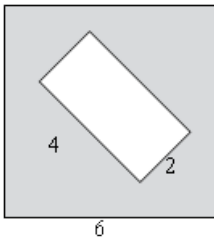
$$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

где S - Площадь трапеции,  
a, b - длины основ трапеции,  
h - высота трапеции

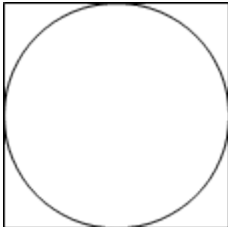
### Задания для самостоятельного выполнения

#### Площадь квадрата

1. Сторона квадрата равна 10. Найдите его площадь.
2. Периметр квадрата равен 40. Найдите площадь квадрата.
3. Периметр квадрата равен 160. Найдите площадь квадрата.
4. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.



5. Из квадрата вырезали прямоугольник (см. рисунок). Найдите площадь получившейся фигуры.



6. Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 83.

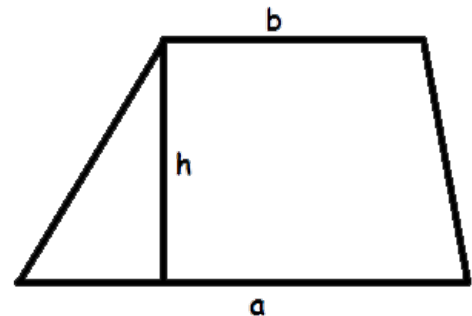
#### Площадь прямоугольника

1. В прямоугольнике одна сторона равна 10, другая сторона равна 12. Найдите площадь прямоугольника.
2. В прямоугольнике диагональ равна 10, а угол между ней и одной из сторон равен  $30^\circ$ . Найдите площадь прямоугольника, делённую на  $\sqrt{3}$ .
3. В прямоугольнике диагональ равна 10, угол между ней и одной из сторон равен  $30^\circ$ , длина этой стороны  $5\sqrt{3}$ . Найдите площадь прямоугольника, делённую на  $\sqrt{3}$ .

4. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 44 и одна сторона на 2 больше другой.

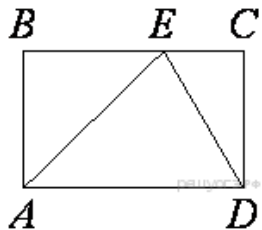
5. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11.

6. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 58 и одна сторона на 5 больше другой.



7. В прямоугольнике одна сторона равна 96, а диагональ равна 100. Найдите площадь прямоугольника.

8. На стороне  $BC$  прямоугольника  $ABCD$ , у которого  $AB = 12$  и  $AD = 17$ , отмечена точка  $E$  так, что  $\angle EAB = 45^\circ$ . Найдите  $ED$ .



### Площадь прямоугольного треугольника

1. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, а угол, лежащий напротив него, равен  $45^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, острый угол, прилежащий к нему, равен  $60^\circ$ , а гипотенуза равна 20. Найдите площадь треугольника, делённую на  $\sqrt{3}$ .

3. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 28 и 100.

4. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 4, а острый угол, прилежащий к нему, равен  $45^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

5. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 70, а один из острых углов равен  $45^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найдите гипотенузу этого треугольника.

7. Два катета прямоугольного треугольника равны 4 и 9. Найдите площадь этого треугольника.

8. Два катета прямоугольного треугольника равны 4 и 10. Найдите площадь этого треугольника.

9. Два катета прямоугольного треугольника равны 18 и 7. Найдите площадь этого треугольника.

10. Два катета прямоугольного треугольника равны 13 и 4. Найдите площадь этого треугольника.

### Площадь равнобедренного треугольника

1. Сторона равностороннего треугольника равна 10. Найдите его площадь, делённую на  $\sqrt{3}$ .

2. Периметр равностороннего треугольника равен 30. Найдите его площадь, делённую на  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

3. Высота равностороннего треугольника равна 10. Найдите его площадь, делённую на  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а угол, лежащий напротив основания, равен  $120^\circ$ . Найдите площадь треугольника, делённую на  $\sqrt{3}$ .

5. Периметр равнобедренного треугольника равен 16, а боковая сторона — 5. Найдите площадь треугольника.

6. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, основание  $5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ , а угол, лежащий напротив основания, равен  $30^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

7. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 34, а основание равно 60. Найдите площадь этого треугольника.

8. Периметр равнобедренного треугольника равен 216, а боковая сторона — 78. Найдите площадь треугольника.

### Площадь треугольника

1. В треугольнике одна из сторон равна 10, а опущенная на нее высота — 5. Найдите площадь треугольника.

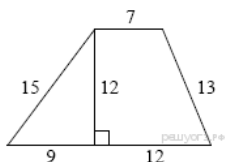
2. В треугольнике одна из сторон равна 10, другая равна  $10\sqrt{3}$ , а угол между ними равен  $60^\circ$ . Найдите площадь треугольника.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

4. В треугольнике  $ABC$  отрезок  $DE$  — средняя линия. Площадь треугольника  $CDE$  равна 97. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

5. Сторона треугольника равна 12, а высота, проведённая к этой стороне, равна 33. Найдите площадь этого треугольника.

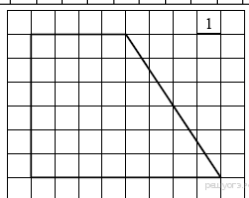
### Площадь трапеции



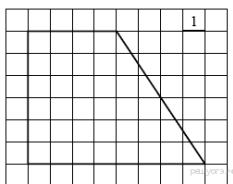
1. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



2. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



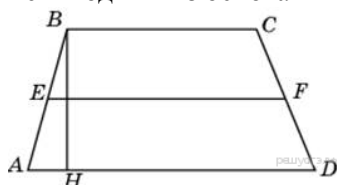
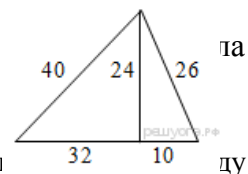
4. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

5. Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна  $4\sqrt{2}$ , а угол между ней и одним из оснований равен  $135^\circ$ . Найдите площадь трапеции.

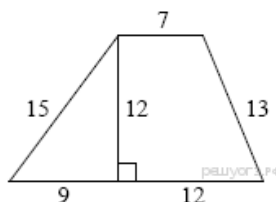
6. Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а синус угла между ней и одним из оснований равен  $\frac{1}{3}$ . Найдите площадь трапеции.

7. Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Найдите площадь трапеции между ней и одним из оснований равен  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

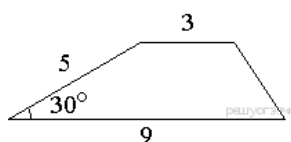
8. Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна 6, а угол между ней и одним из оснований равен  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Найдите площадь трапеции.



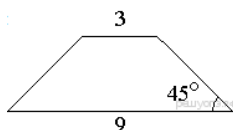
9. Средняя линия трапеции равна 11, а меньшее основание равно 5. Найдите большее основание трапеции.



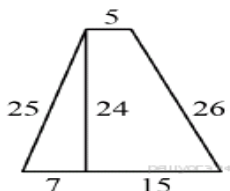
10. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



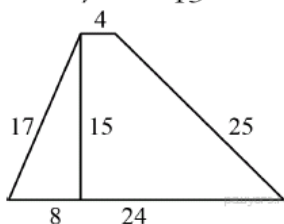
11. Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилежащих к ней углов равен  $30^\circ$ . Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.



12. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 9, а один из углов между боковой стороной и основанием равен  $45^\circ$ . Найдите площадь трапеции.



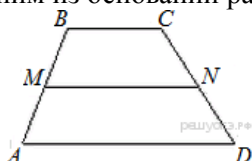
13. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



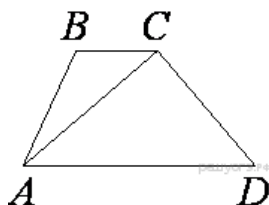
14. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

15. Основания равнобедренной трапеции равны 5 и 17, а её боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.

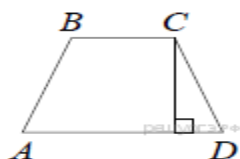
16. Основания трапеции равны 1 и 13, одна из боковых сторон равна  $15\sqrt{2}$ , а угол между ней и одним из оснований равен  $135^\circ$ . Найдите площадь трапеции.



17. В трапеции  $ABCD$   $AD = 5$ ,  $BC = 2$ , а её площадь равна 28. Найдите площадь трапеции  $BCNM$ , где  $MN$  – средняя линия трапеции  $ABCD$ .

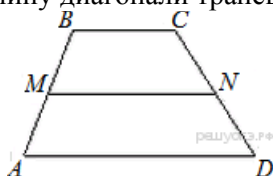


18. В трапеции  $ABCD$   $AD = 3$ ,  $BC = 1$ , а её площадь равна 12. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

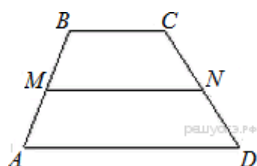


19. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины  $C$ , делит основание  $AD$  на отрезки длиной 2 и 9. Найдите длину основания  $BC$ .

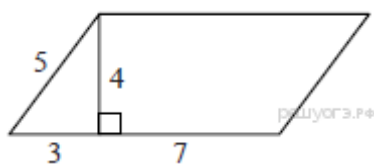
20. Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 14, боковая сторона равна 13. Найдите длину диагонали трапеции.



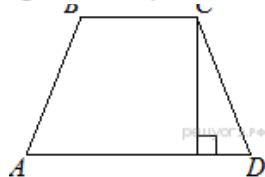
21. В трапеции  $ABCD$  известно, что  $AD = 6$ ,  $BC = 2$ , а её площадь равна 32. Найдите площадь трапеции  $BCNM$ , где  $MN$  – средняя линия трапеции  $ABCD$ .



22. В трапеции  $ABCD$  известно, что  $AD = 5$ ,  $BC = 1$ , а её площадь равна 51. Найдите площадь трапеции  $BCNM$ , где  $MN$  – средняя линия трапеции  $ABCD$ .



3. В трапеции  $ABCD$  известно, что  $AD = 8$ ,  $BC = 5$ , а её площадь равна 52. Найдите площадь трапеции  $BCNM$ , где  $MN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ .

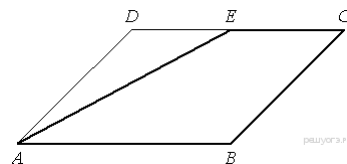


24. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины  $C$ , отсекает от основания  $AD$  отрезок длиной 2. Длина основания  $BC$  равна 7. Найдите длину основания  $AD$ .

### Площадь ромба, параллелограмма

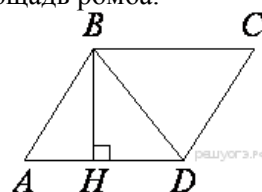
1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.
2. Сторона ромба равна 5, а диагональ равна 6. Найдите площадь ромба.
3. Периметр ромба равен 40, а один из углов равен  $30^\circ$ . Найдите площадь ромба.
4. Периметр ромба равен 24, а синус одного из углов равен  $\frac{1}{3}$ . Найдите площадь ромба.
5. Одна из сторон параллелограмма равна 12, а опущенная на нее высота равна 10. Найдите площадь параллелограмма.
6. Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а один из углов —  $45^\circ$ . Найдите площадь параллелограмма, делённую на  $\sqrt{2}$ .

7. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 56. Точка  $E$  — середина стороны  $CD$ . Найдите площадь трапеции  $AECB$ .

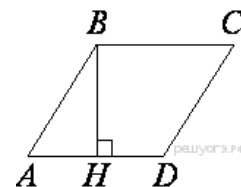


8. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.
9. Сторона ромба равна 9, а расстояние от центра ромба до неё равно 1. Найдите площадь ромба.
10. Сторона ромба равна 50, а диагональ равна 80. Найдите площадь ромба.
11. Периметр ромба равен 116, а один из углов равен  $30^\circ$ . Найдите площадь ромба.

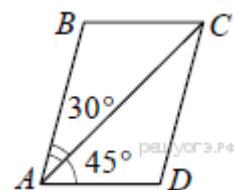
12. Высота  $BH$  параллелограмма  $ABCD$  делит его сторону  $AD$  на отрезки  $AH = 1$  и  $HD = 28$ . Диагональ параллелограмма  $BD$  равна 53. Найдите площадь параллелограмма.



13. Высота  $BH$  ромба  $ABCD$  делит его сторону  $AD$  на отрезки  $AH = 5$  и  $HD = 8$ . Найдите площадь ромба.

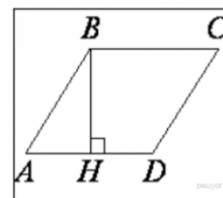
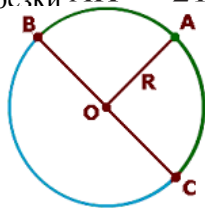


14. Диагональ  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  образует с его сторонами углы, равные  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



15. Площадь ромба равна 54, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.

16. Высота  $BH$  ромба  $ABCD$  делит его сторону  $AD$  на отрезки  $AH = 21$  и  $HD = 14$ . Найдите площадь ромба.



### Тема 10. Окружность, круг и их элементы

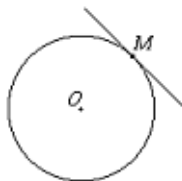
*Окружность* — это линия на плоскости, каждая точка которой расположена на одинаковом расстоянии от центра окружности. Это расстояние называется *радиус* и в записях обозначается буквой  $R$ .

Центр окружности обозначают буквой  $O$ .

Окружность разделяет плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю. Внутренняя часть, включающая саму окружность, называется *кругом*.

Точка  $O$  — это центр и круга и окружности.

Отрезки  $OA$ ,  $OB$ , и  $OC$  — это радиусы, их длины равны. Отрезок  $BC$ , проходящий через центр окружности (круга) называется *диаметром* и обозначается буквой  $D$ . Диаметр разделяет круг на два полуокруга, а окружность на две полуокружности.



*Диаметр равен двум радиусам*, это хорошо видно на рисунке.

$BC = OC + OB$ , так как  $BC = D$ , а  $OC = OB = R$ , то  $D = 2R$ .

Точки  $A$  и  $B$  делят окружность на две части, которые называются *дугами*, а точки  $A$  и  $B$  концами этих дуг.

*Дуга окружности* — это часть окружности ограниченная двумя

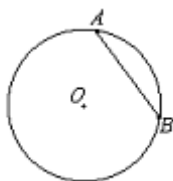
точками.

На рисунке точки  $B$  и  $C$  разделили окружность на две дуги, голубую и зеленую.

Записать их названия мы можем так:

$BC$  (дуга  $BC$ ) — в данном случае речь может идти как о голубой так и о зеленой;

$BAC$  (дуга  $BAC$ ) — в данном случае речь идет именно о зеленой дуге.



#### Касательная

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

*Свойства касательной:*

- 1) Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.
- 2) Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

#### Хорда

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее хордой. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.

*Свойства хорд:*

- 1) Диаметр (радиус), перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам. Верна и обратная теорема: если диаметр (радиус) делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.
- 2) Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.



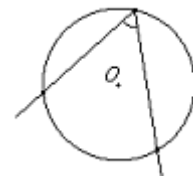
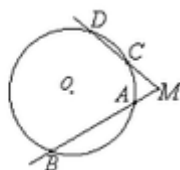
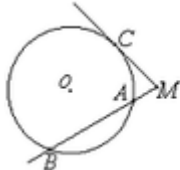
- 3) Если две хорды окружности, АВ и CD пересекаются в точке М, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды:  $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ .

*Свойства окружности:*

- 1) Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая).
- 2) Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.
- 3) Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.



*Теорема о касательной и секущей*  
Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть:  $MC^2 = MA \cdot MB$ .



*Теорема о секущих*

Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть.  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

*Углы в окружности*

*Центральным углом* в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре (слева).

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным углом* (справа).

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется дугой окружности. Мерой дуги может служить мера соответствующего ей центрального угла.

Дуга называется полуокружностью, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром.

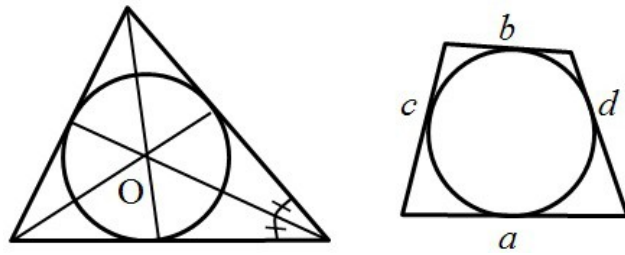
*Свойства углов, связанных с окружностью:*

- 1) Вписанный угол либо равен половине соответствующего ему центрального угла, либо дополняет половину этого угла до  $180^\circ$
- 2) Углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны
- 3) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен  $90^\circ$
- 4) Угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.

*Вписанная окружность*

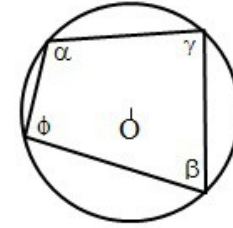
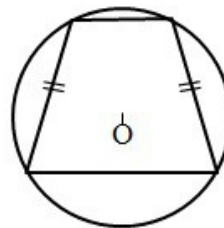
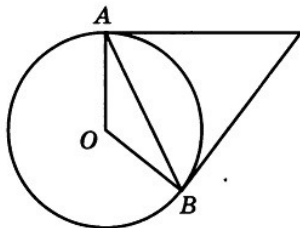
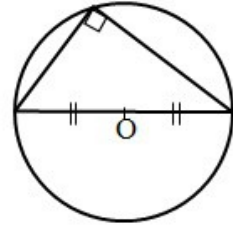
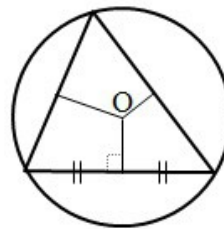
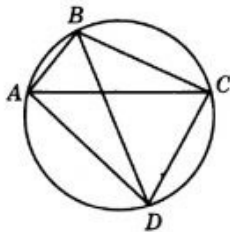
Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис треугольника.

Если окружность вписана в произвольный четырехугольник, тогда попарные суммы противоположных сторон равны между собой:  $a + b = c + d$



### Описанная окружность и её свойства

- 1) Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его трем сторонам.
- 2) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.
- 3) Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда трапеция равнобедренная.
- 4) Если окружность описана около произвольного четырехугольника, тогда попарные суммы противоположных углов равны между собой.



**Пример 32.** Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен  $92^\circ$ , угол CAD равен  $60^\circ$ . Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

*Решение:*

Внимательно посмотрим на рисунок. Угол ABC опирается на дугу ADC, а угол CAD - на дугу DC. Угол, который нам необходимо найти - ABD, опирается на дугу AD - которая является частью дуги ADC за вычетом дуги DC. Значит, угол ABD равен разности углов ABC и CAD:

$$\angle ABD = 92 - 60 = 32$$

Ответ:  $32^\circ$

**Пример 33.** Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом  $2^\circ$ . Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.

*Решение:*

Во-первых, касательные равны между собой по длине, а значит треугольник с основанием AB равнобедренный. Угол при вершине этого треугольника равен  $2^\circ$  по условию, значит углы при основании равны:  $(180 - 2) / 2 = 89^\circ$

Во-вторых, касательные перпендикулярны радиусу, то есть угол между ними и радиусом равен  $90^\circ$  градусов.

Заметим, что угол  $ABO$ , который необходимо найти, является частью угла между касательной и радиусом, а именно за вычетом угла, который мы нашли в первом пункте. Значит, этот угол равен:  $90 - 89 = 1^\circ$

Ответ: 1

**Пример 34.** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AC = 16$ ,  $BC = 12$ , угол  $C$  равен  $90^\circ$ . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

*Решение:*

Для решения необходимо вспомнить, что центр описанной около прямоугольного треугольника окружности расположен в середине гипотенузы. То есть гипотенуза является диаметром, а её половина - радиусом.

По теореме Пифагора найдем гипотенузу  $AB$ :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$$

$$AB = \sqrt{400} = 20$$

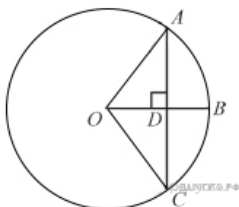
Гипотенуза равна 20, значит радиус - 10.

Ответ: 10

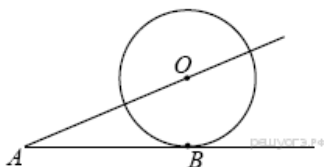
### Задания для самостоятельного выполнения

*Касательная, хорда, секущая, радиус*

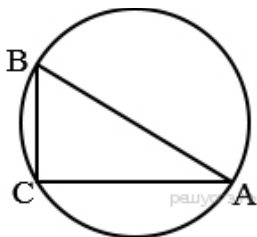
1. Радиус круга равен 1. Найдите его площадь, деленную на  $\pi$ .



2. Радиус  $OB$  окружности с центром в точке  $O$  пересекает хорду  $AC$  в точке  $D$  и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды  $AC$ , если  $BD = 1$  см, а радиус окружности равен 5 см.



3. К окружности с центром в точке  $O$  проведены касательная  $AB$  и секущая  $AO$ . Найдите радиус окружности, если  $AB = 12$  см,  $AO = 13$  см.

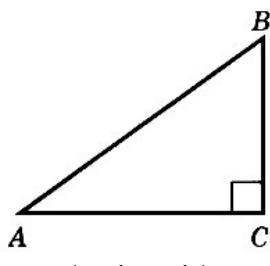


4. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 30$ ,  $BC = 5\sqrt{13}$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



5. Длина хорды окружности равна 72, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 27. Найдите диаметр окружности

6.  
са  
7.  
ст

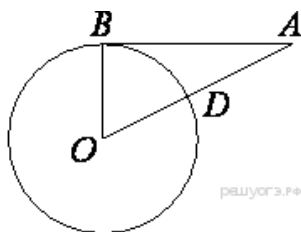


в точке  $K$ . Точка  $O$  — центр окружности. Хорда  $KM$  образует с какой-либо из сторон треугольника угол. Найдите величину угла  $OMK$ . Ответ дайте в градусах.

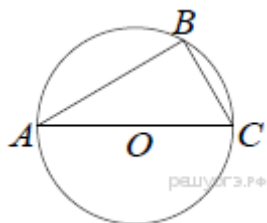
7. Две хорды окружности. Найдите длину хорды  $CD$ , если  $AB = 20$ , а расстояния от центра окружности до хорд  $AB$  и  $CD$  равны соответственно 24 и 10.

8. Отрезки  $AB$  и  $CD$  являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $CD$ , если  $AB = 18$ ,  $CD = 24$ , а расстояние от центра окружности до хорды  $AB$  равно 12.

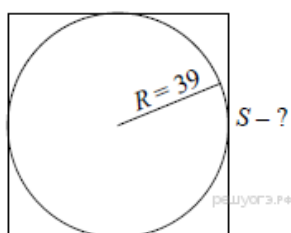
9. На окружности с центром  $O$  отмечены точки  $A$  и  $B$  так, что  $\angle AOB = 66^\circ$ . Длина меньшей дуги  $AB$  равна 99. Найдите длину большей дуги.



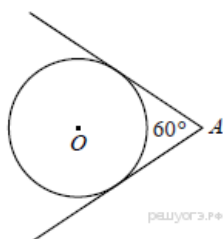
10. Отрезок  $AB = 40$  касается окружности радиуса 75 с центром  $O$  в точке  $B$ . Окружность пересекает отрезок  $AO$  в точке  $D$ . Найдите  $AD$ .



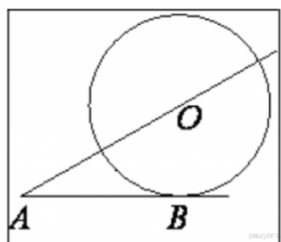
11. Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  проходит через центр описанной около него окружности. Найдите  $\angle C$ , если  $\angle A = 44^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



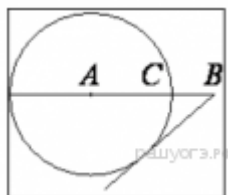
12. Окружность вписана в квадрат. Найдите площадь квадрата.



13. Из точки  $A$  проведены две касательные к окружности с центром в точке  $O$ . Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен  $60^\circ$ , а расстояние от точки  $A$  до точки  $O$  равно 8.



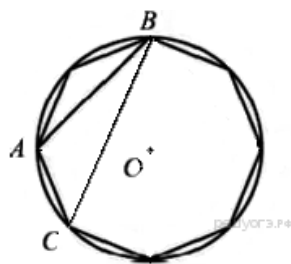
14. К окружности с центром в точке  $O$  проведены касательная  $AB$  и секущая  $AO$ . Найдите радиус окружности, если  $AB = 40$ ,  $AO = 85$ .



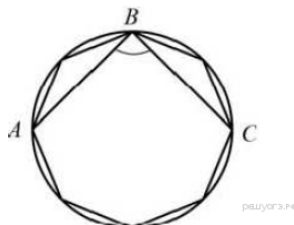
15. На отрезке  $AB$  выбрана точка  $C$  так, что  $AC = 10$  и  $BC = 16$ . Построена окружность с центром  $A$ , проходящая через  $C$ . Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки  $B$  к этой окружности.

### Окружность, описанная вокруг многоугольника

1. В окружность вписан равносторонний восьмиугольник. Найдите величину угла  $ABC$ .

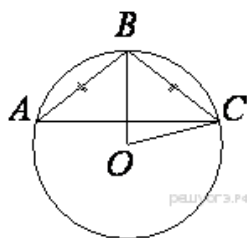


2. В окружность вписан равносторонний восьмиугольник. Найдите величину угла  $ABC$ .

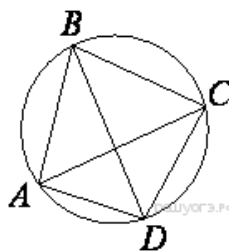


3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен  $120^\circ$ . Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

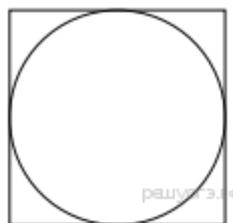
4. Окружность с центром в точке  $O$  описана около равнобедренного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = BC$  и  $\angle ABC = 177^\circ$ . Найдите величину угла  $BOC$ . Ответ дайте в градусах.



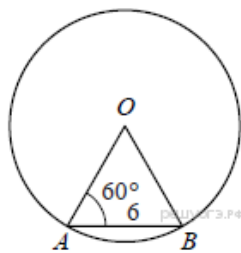
5. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $70^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $49^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ . Ответ дайте в градусах.



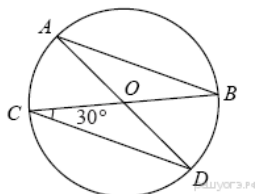
6. Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 7.



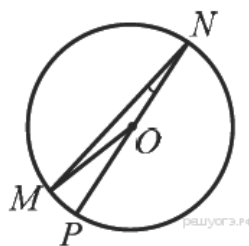
Центральные и вписанные углы



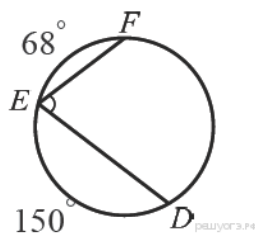
1. Центральный угол  $AOB$  опирается на хорду  $AB$  длиной 6. При этом угол  $OAB$  равен  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности.



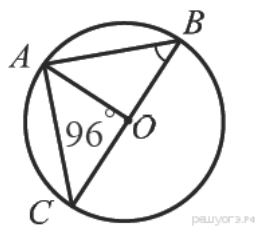
2. В окружности с центром в точке  $O$  проведены диаметры  $AD$  и  $BC$ , угол  $OCD$  равен  $30^\circ$ . Найдите величину угла  $OAB$ .



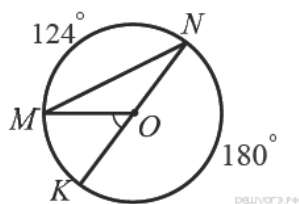
3. Найдите градусную меру  $\angle MON$ , если известно,  $NP$  — диаметр, а градусная мера  $\angle MNP$  равна  $18^\circ$ .



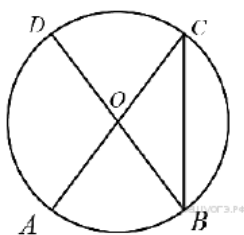
4. Найдите  $\angle DEF$ , если градусные меры дуг  $DE$  и  $EF$  равны  $150^\circ$  и  $68^\circ$  соответственно.



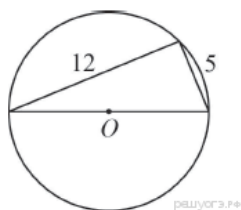
5. Найдите градусную меру  $\angle ACB$ , если известно, что  $BC$  является диаметром окружности, а градусная мера  $\angle AOC$  равна  $96^\circ$ .



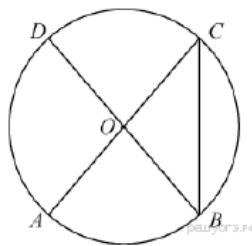
6. Найдите  $\angle KOM$ , если известно, что градусная мера дуги  $MN$  равна  $124^\circ$ , а градусная мера дуги  $KN$  равна  $180^\circ$ .



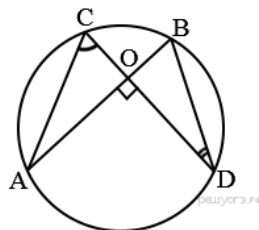
7. В окружности с центром  $O$   $AC$  и  $BD$  — диаметры. Угол  $ACB$  равен  $26^\circ$ . Найдите угол  $AOD$ . Ответ дайте в градусах.



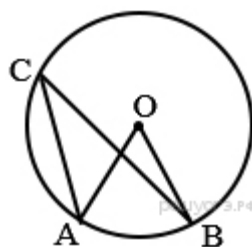
8. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вписан в окружность. Чему равен радиус этой окружности?



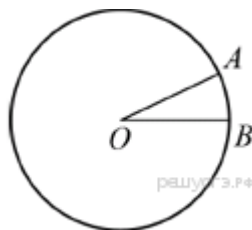
9. Величина центрального угла  $AOD$  равна  $110^\circ$ . Найдите величину вписанного угла  $ACB$ . Ответ дайте в градусах.



10. Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной окружности так, что хорды  $AB$  и  $CD$  взаимно перпендикулярны, а  $\angle BDC = 25^\circ$ . Найдите величину угла  $ACD$ .

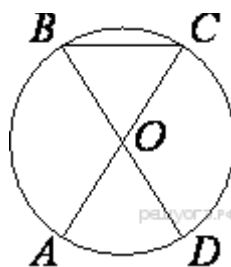


11. Точка  $O$  — центр окружности,  $\angle AOB = 84^\circ$  (см. рисунок). Найдите величину угла  $ACB$  (в градусах).

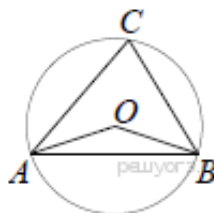


12. На окружности с центром  $O$  отмечены точки  $A$  и  $B$  так, что  $\angle AOB = 28^\circ$ . Длина меньшей дуги  $AB$  равна 63. Найдите длину большей дуги.

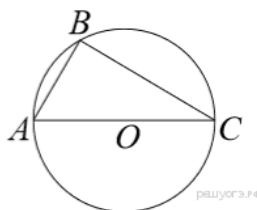




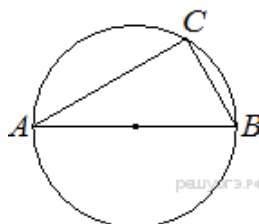
13.  $AC$  и  $BD$  — диаметры окружности с центром  $O$ . Угол  $ACB$  равен  $79^\circ$ . Найдите угол  $AOD$ . Ответ дайте в градусах.



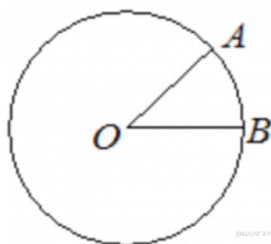
14. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Найдите градусную меру угла  $C$  треугольника  $ABC$ , если угол  $AOB$  равен  $115^\circ$ .



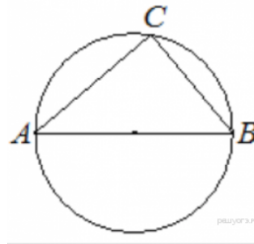
15. Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  содержит центр описанной около него окружности. Найдите  $\angle C$ , если  $\angle A = 75^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



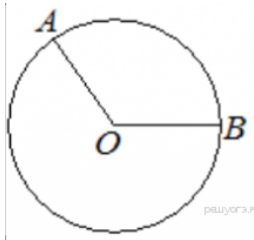
16. Центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , лежит на стороне  $AB$ . Найдите угол  $ABC$ , если угол  $BAC$  равен  $30^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



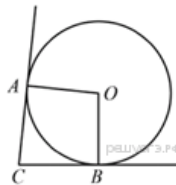
17. На окружности с центром в точке  $O$  отмечены точки  $A$  и  $B$  так, что  $\angle AOB = 40^\circ$ . Длина меньшей дуги  $AB$  равна 50. Найдите длину большей дуги  $AB$ .



18. Центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , лежит на стороне  $AB$ . Найдите угол  $ABC$ , если угол  $BAC$  равен  $44^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



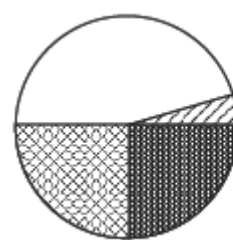
19. На окружности с центром в точке  $O$  отмечены точки  $A$  и  $B$  так, что  $\angle AOB = 122^\circ$ . Длина меньшей дуги  $AB$  равна 61. Найдите длину большей дуги  $AB$ .







20. В угол  $C$  величиной  $71^\circ$  вписана окружность, которая касается сторон угла в точках  $A$  и  $B$ , точка  $O$  - центр окружности. Найдите угол  $AOB$ . Ответ дайте в градусах.

# Модуль

# «Реальная



-  худ. литература заруб. авторов
-  худ. литература рос. авторов
-  уч. литература заруб. авторов
-  уч. литература рос. авторов

# математика»



## **Тема 11. Анализ диаграмм, таблиц, графиков** **Задания для самостоятельного выполнения**

### *Диаграммы*

1. Фонд школьной библиотеки, состоящей из учебной и художественной литературы российских и зарубежных авторов, представлен в виде диаграммы. Сколько примерно книг учебной литературы в библиотеке, если всего в библиотечном фонде 800 книг?

*В ответе укажите номер правильного варианта.*

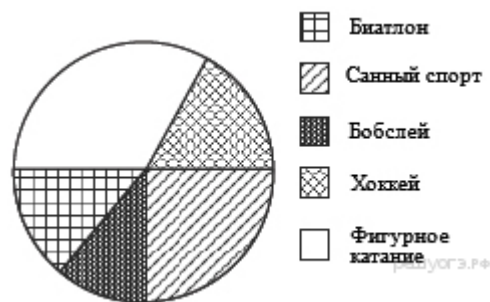
1) 400

- 2) 570
- 3) 300
- 4) 600

2. Завуч школы подвел итоги по выбору предметов для сдачи ЕГЭ учащимися 11-х классов. Результаты представлены на диаграмме. Сколько примерно учащихся выбрали для сдачи ЕГЭ физику?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) 16
- 2) 12
- 3) 14
- 4) 8



3. На диаграмме показано количество посаженных деревьев и кустарников в г. Сочи за период с 2009 по 2012 гг. Определите, сколько всего было посажено зелёных насаждений за 2011 г. и 2012 г.?

В ответе укажите номер правильного варианта.

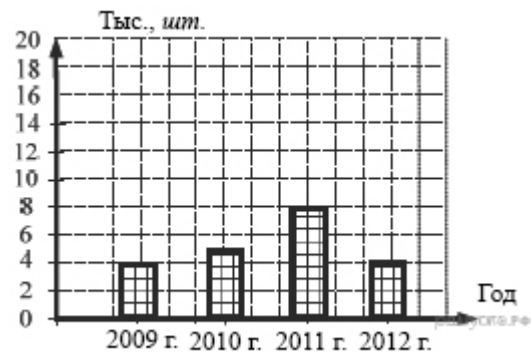
- 1) 10 000
- 2) 4 000
- 3) 12 000
- 4) 8 000



4. На диаграмме показано количество школьников, посетивших театры г. Краснодара за 2010 г. Определите, сколько примерно зрителей посетили за этот период Филармонию, если во всех этих театрах школьников было 2000 человек.

В ответе укажите номер правильного варианта.

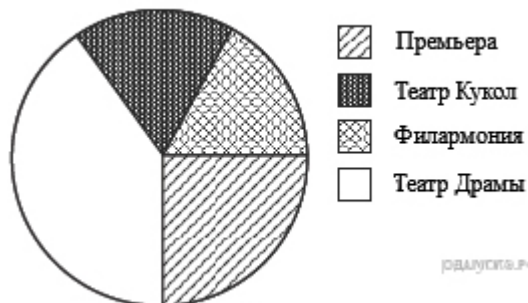
- 1) 150
- 2) 240
- 3) 350
- 4) 500



5. Учитель математики подвел итоги контрольной работы по алгебре среди учащихся 9-х классов. Результаты представлены на диаграмме. Сколько примерно учащихся получили отметку «4» и «5», если всего в этих классах учатся 200 учащихся?

В ответе укажите номер правильного варианта.

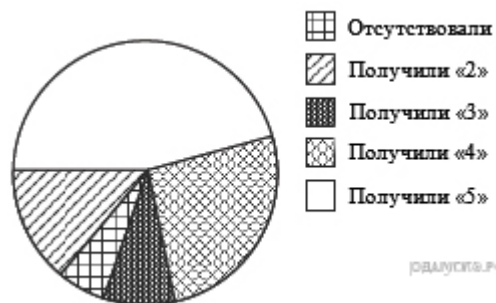
- 1) 120
- 2) 50
- 3) 60
- 4) 140



6. Учащимся сочинских школ был задан вопрос: «По какому виду спорта вы хотели бы посетить соревнования на Зимней олимпиаде в Сочи?». Их ответы можно увидеть на диаграмме. Сколько примерно учащихся хотели бы посетить соревнования и по хоккею, и по санному спорту, если всего в опросе приняли участие 400 школьников?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) 180



- 2) 240
- 3) 120
- 4) 200

#### Анализ таблиц

1. В таблице приведены результаты двух полуфинальных забегов на дистанцию 60 м. В финальном забеге 6 участников. Из каждого полуфинала в финал выходят два спортсмена, показавших первый и второй результаты. К ним добавляют еще двух спортсменов, показавших лучшее время среди всех остальных участников полуфиналов.

	Полуфинал 1				Полуфинал 2			
Номер спортсмена	1	2	3	4	5	6	7	8
Время, с	6,93	6,98	7,03	6,89	7,02	6,97	7,01	7,08
Место в забеге								

Запишите в ответ номера спортсменов, не попавших в финал.

2. Платеж за потребление электроэнергии осуществляется по двух тарифному счетчику. Тариф зависит от времени суток. Общая сумма платежа складывается из сумм по каждому из двух тарифов. Квитанция на оплату содержит следующую таблицу.

Тарифная зона	Показания счетчика		Расход факт.	Тариф (р.)	Сумма к оплате (р.)
	Текущее	Предыдущее			
день (Т1)	9632	9546		3,80	
ночь (Т2)	6231	5937		0,95	

Вычисл

ите общую сумму платежа за указанный в таблице расход электроэнергии.

3. В таблице даны результаты забега мальчиков 8-го класса на дистанцию 60 м.

Номер дорожки	1	2	3	4
Время (с)	10,3	10,7	11,0	9,1

Зачёт выставляется, если показано время не хуже 10,5 с. Выпишите номера дорожек, по которым бежали мальчики, получившие зачёт. Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

4. В таблице даны рекомендуемые суточные нормы потребления (в г/сутки) жиров, белков и углеводов детьми от 1 года до 14 лет и взрослыми.

Вещество	Дети от 1 года до 14 лет	Мужчины	Женщины
Жиры	40—97	70—154	60—102
Белки	36—87	65—117	58—87
Углеводы	170—420	257—586	

Какой вывод о суточном потреблении жиров, белков и углеводов 7-летней девочкой можно сделать, если по подсчётам диетолога в среднем за сутки она потребляет 42 г жиров, 35 г белков и 190 г углеводов? В ответе укажите номера верных утверждений.

- 1) Потребление жиров в норме.
- 2) Потребление белков в норме.

3) Потребление углеводов в норме.  
Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

5. Василий измерял в течение недели время, которое он тратил на дорогу до школы, а результаты записывал в таблицу.

День недели	Пн	Вт	Ср	Ч
Время (мин.)	28	38	27	3

Сколько минут в среднем занимает у Василия дорога до школы?

6. В таблице приведена стоимость работ по покраске потолков.

Цвет потолка	Цена в рублях за 1 м <sup>2</sup> (в зависимости от площади помещения)			
	до 10 м <sup>2</sup>	от 11 до 30 м <sup>2</sup>	от 31 до 60 м <sup>2</sup>	свыше 60 м <sup>2</sup>
белый	105	85	70	60
цветной	120	100	90	85

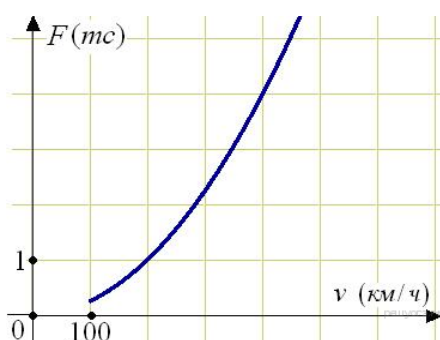
Пользуясь данными, представленными в таблице, определите, какова будет стоимость работ, если площадь потолка 40 м<sup>2</sup>, потолок цветной и действует сезонная скидка в 10%. Ответ укажите в рублях.

*Определение величины по графику*

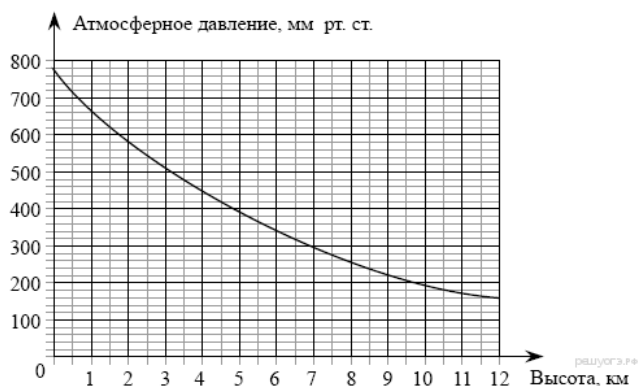
1. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах). На какой высоте (в км) летит воздушный шар, если барометр, находящийся в корзине шара, показывает давление 540 миллиметров ртутного столба?

2. Когда самолет находится в горизонтальном полете, подъемная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На рисунке изображена эта зависимость для некоторого самолета. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат – сила (в тоннах силы). Определите по рисунку, чему равна подъемная сила (в тоннах силы) при скорости 200 км/ч?

3. В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортерной ленте. При проектировании транспортера необходимо учитывать допустимую

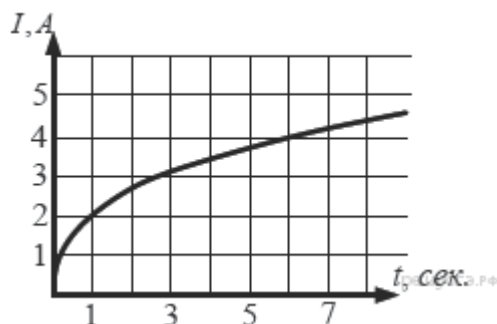


силу натяжения ленты транспортера. На рисунке изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортера к горизонту при расчетной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъема в градусах, на оси ординат – сила натяжения транспортерной ленты

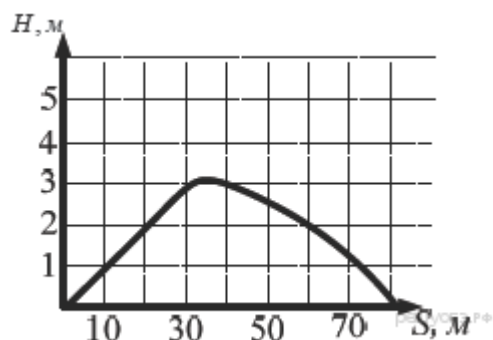


(в килограммах силы). При каком угле наклона сила натяжения достигает 150 кгс? Ответ дайте в градусах.

4. На рисунке изображен график изменения силы тока при подключении цепи, содержащей реостат, к источнику тока. По вертикальной оси откладывается сила тока  $I$  (в А), по горизонтальной — время  $t$  (в сек). По рисунку определите силу тока через 6 секунд с момента подключения данной цепи.



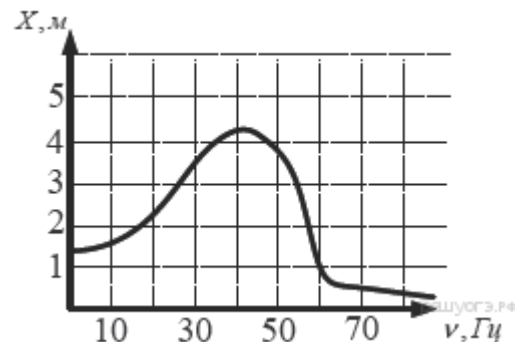
По рисунку определите, на какой высоте будет находиться тело в момент времени, когда оно пролетит 60 метров.



На сколько миллиметров ртутного столба отличается давление на высоте 2 км от давления на высоте 8 км?

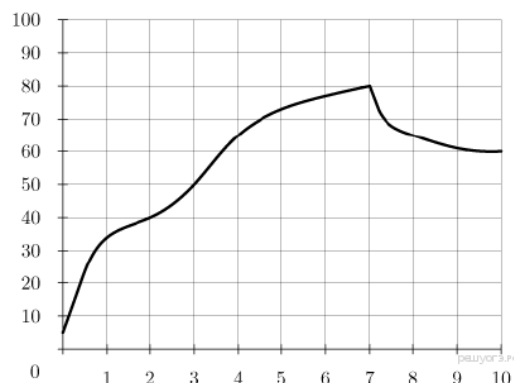


6. На рисунке изображен график полета тела, брошенного под углом к горизонту. По вертикальной оси от-



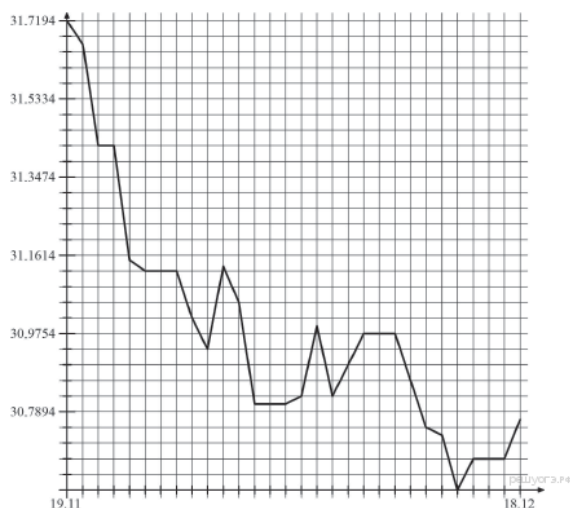
Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался до температуры 50 °С с момента запуска двигателя.

8. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем



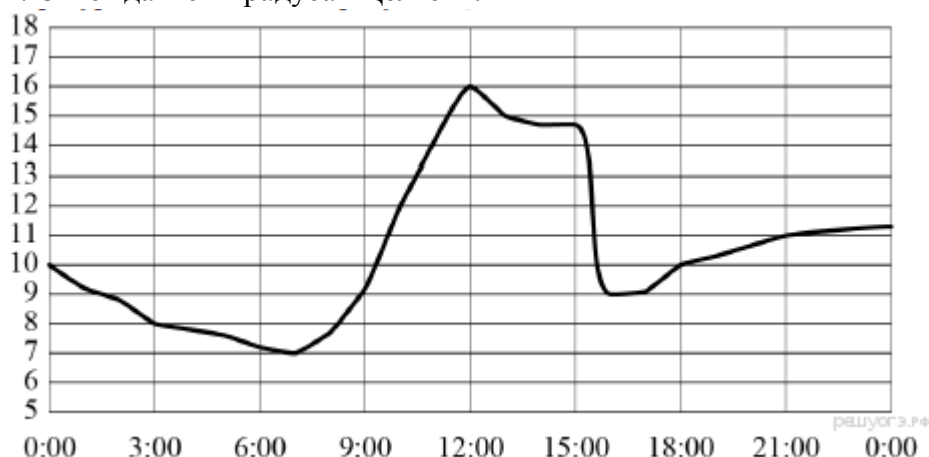


9. На графике представлена динамика изменения курса доллара США в рублю за период с 19 ноября по 19 декабря. По горизонтальной оси отложены даты, по вертикальной — значения доллара США. Шаг по вертикальной оси равен 0,0372 руб. Определите по графику, каким был курс доллара США к рублю 21 ноября.



Цельсия.

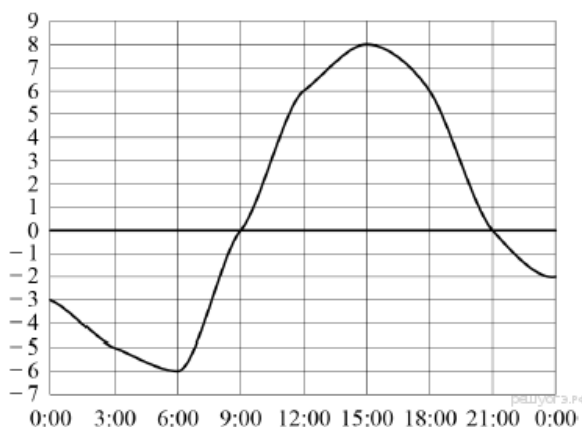
11. На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите наименьшее значение температуры. Ответ дайте в градусах Цельсия.



12. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты местности над уровнем моря (в километрах). На сколько миллиметров ртутного столба атмосферное давление на высоте Эвереста ниже атмосферного давления на высоте Большого Шелом?



10. На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите наибольшее значение температуры. Ответ дайте в градусах

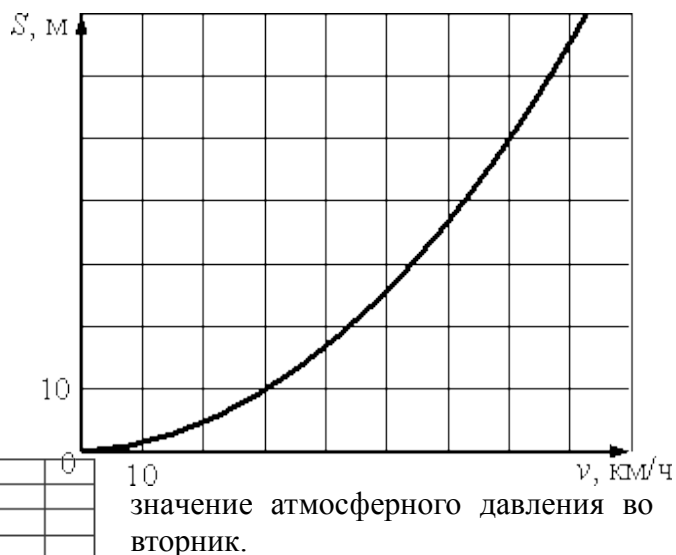




13. На рисунке изображён график изменения атмосферного давления в городе Энске за три дня. По горизонтали указаны дни недели, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Укажите наименьшее



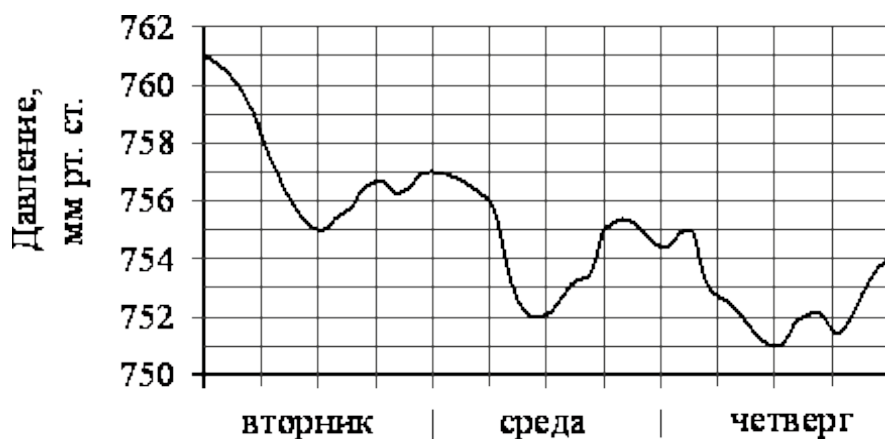
стоимости разговора от его продолжительности изображена графически. На сколько минут хватит 550 р., если используется тариф В?



14. Компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф А и тариф В. Для каждого тарифа зависимость



15. На рисунке изображён график изменения атмосферного давления в городе Энске за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали — значения атмосферного давления в милли-

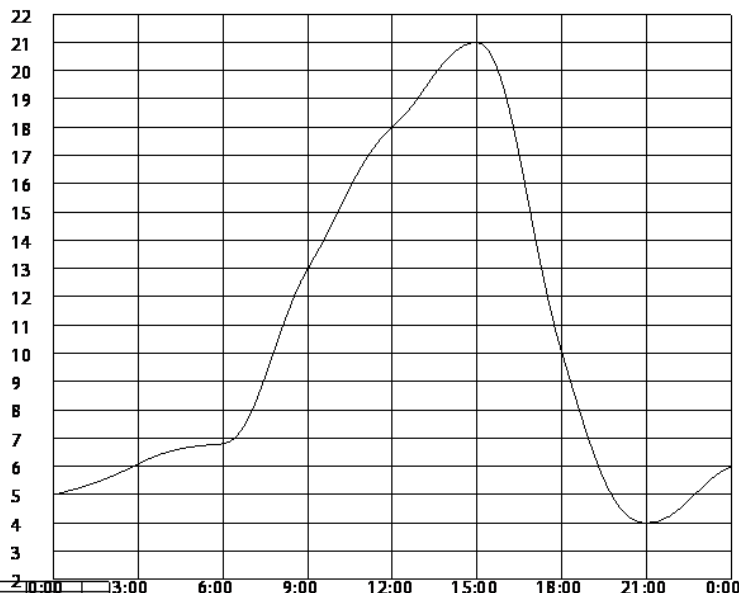
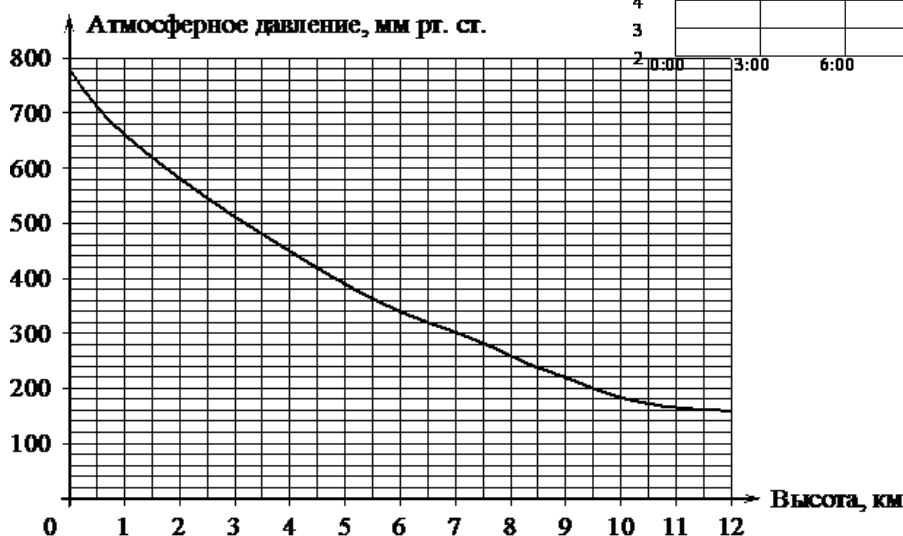


метрах ртутного столба. Укажите значение атмосферного давления (в мм рт. ст.) во вторник в 12 часов дня.

По горизонтальной оси откладывается скорость (в км/ч), по вертикальной — тормозной путь (в метрах). Определите по графику, каким будет тормозной путь автомобиля, который движется со скоростью 70 км/ч. Ответ дайте в метрах.

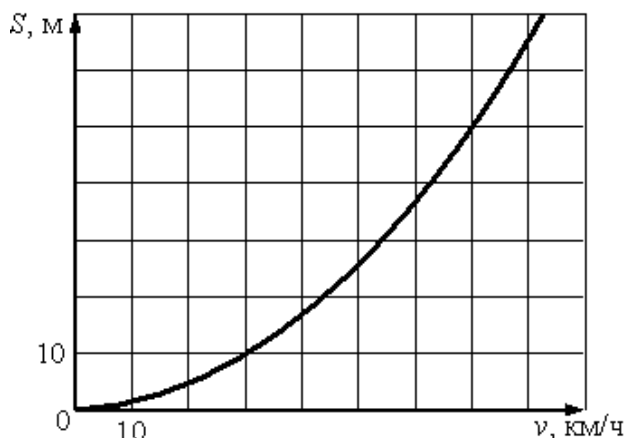
16. При резком торможении расстояние, пройденное автомобилем до полной остановки (тормозной путь), зависит от скорости, с которой автомобиль двигался. На рисунке показан график этой зависимости.

17. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах). Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 660 мм рт. ст. Ответ дайте в километрах.



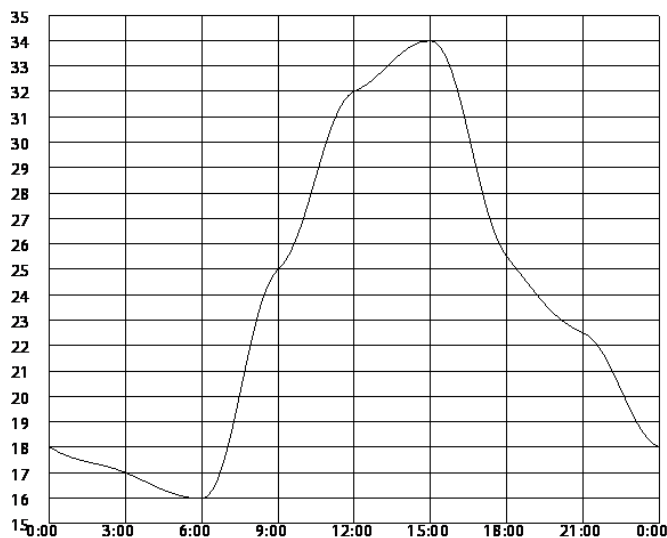
18. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах). Найдите, чему равно атмосферное давление на высоте 6 км. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.

19. При резком торможении расстояние, пройденное автомобилем до полной остановки (тормозной путь), зависит от скорости, с которой автомобиль двигался. На рисунке показан график этой зависимости (для сухой асфальтовой дороги). По горизонтальной оси откладывается скорость (в км/ч), по вертикальной – тормозной путь (в метрах). Определите по графику,

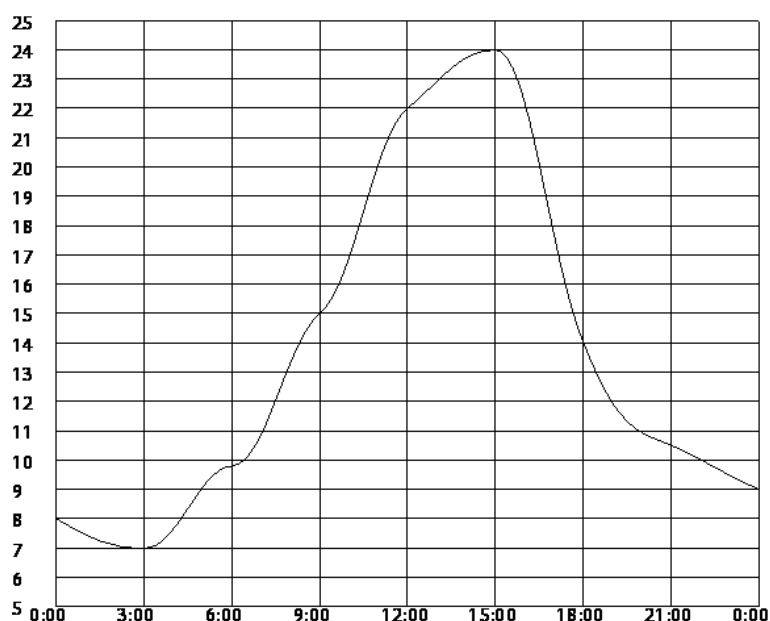


ку, с какой скоростью двигался автомобиль, если его тормозной путь составил 50 метров. Ответ дайте в километрах в час.

20. На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите наибольшее значение температуры. Ответ дайте в градусах Цельсия.

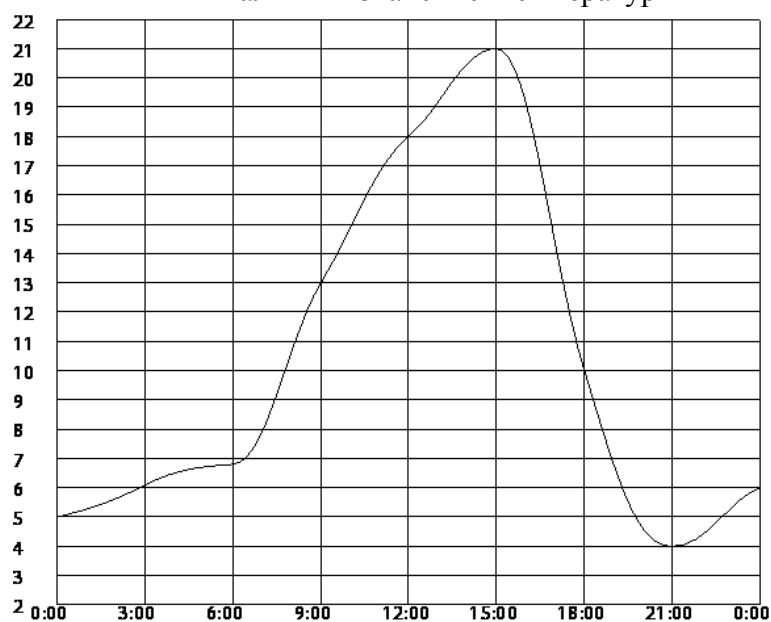


**21.** На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите наименьшее значение температуры. Ответ дайте в градусах Цельсия.



**22.** На рисунке показано, как изменялась температура на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в

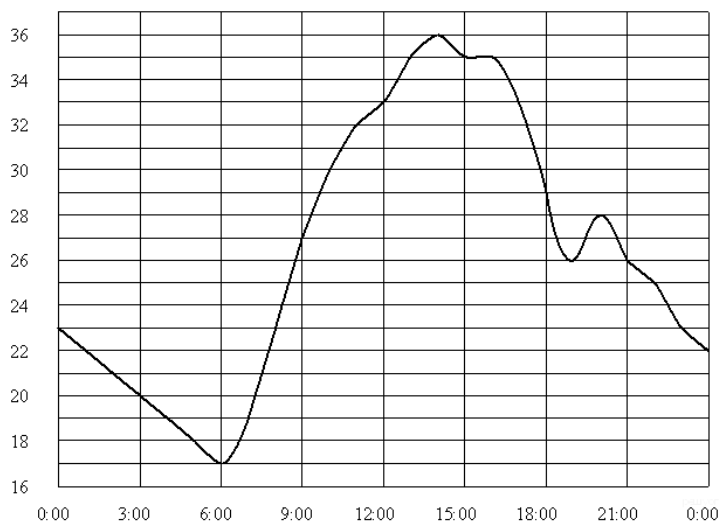
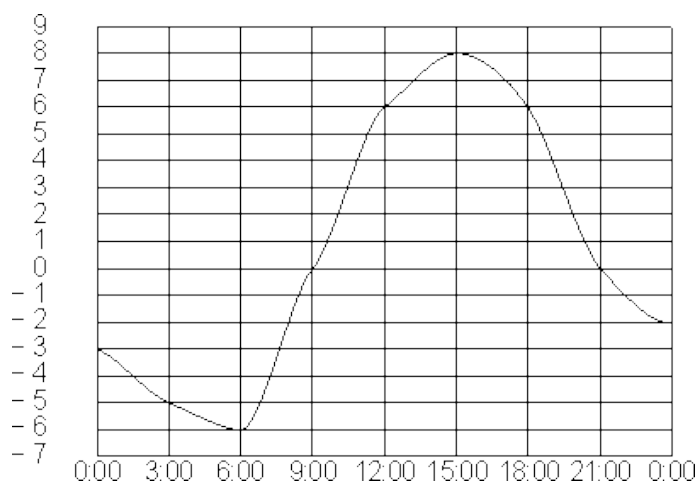
градусах Цельсия. Сколько часов во второй половине дня температура превышала 10 °C?



**23.** На рисунке показано, как изменялась температура на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Сколько часов в первой половине дня температура превышала 25 °C?

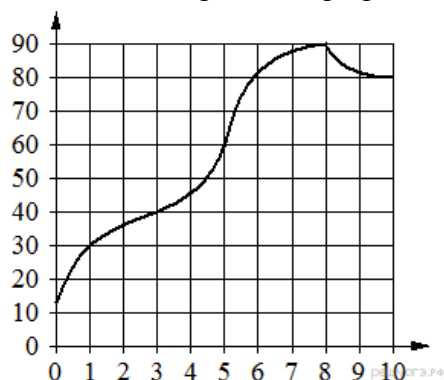
24. На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Сколько часов в первой половине дня температура **не** превышала  $0^{\circ}\text{C}$ ?

25. На рисунке показано, как изменялась температура на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Сколько часов после 12:00 температура превышала  $29^{\circ}\text{C}$ ?

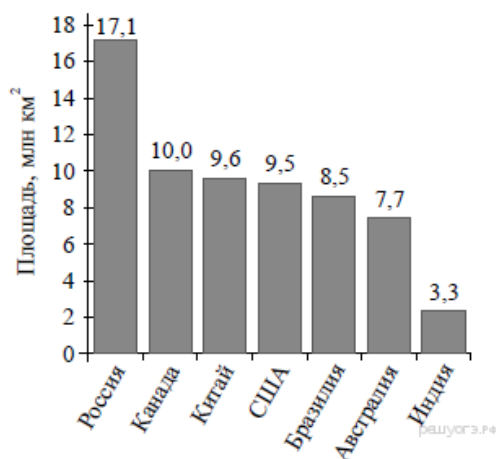


26. На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько минут двигатель нагреется с  $40^{\circ}\text{C}$  до  $90^{\circ}\text{C}$ .

*Столбчатые диаграммы, графики*



1. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн  $\text{км}^2$ ) стран мира. Какое из следующих утверждений **неверно**?



- 1) Площадь территории Индии составляет 3,3 млн км<sup>2</sup>
- 2) Площадь Китая больше площади Австралии.
- 3) Россия — крупнейшая по площади территории страна мира.
- 4) площадь Канады больше площади США на 1,5 млн км<sup>2</sup>

*В ответ запишите номер выбранного утверждения.*

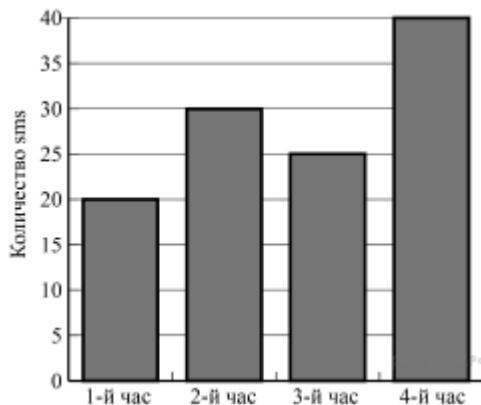
2. 156 учащимся восьмых классов некоторой школы была предложена контрольная работа по алгебре из 5 заданий. По результатам составили таблицу, в которой указали число учащихся, выполнивших одно, два три и т.д. заданий:

Количество выполненных заданий	Число учащихся
0	-
1	27
2	34
3	46
4	37
5	12

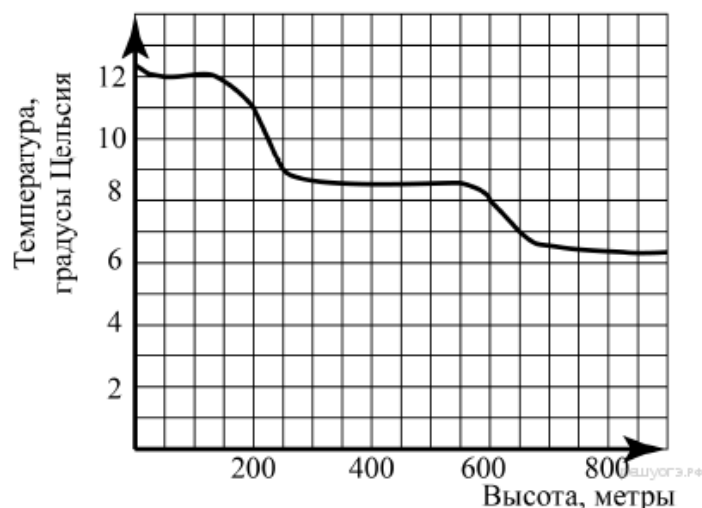
Сколько человек получили оценку выше «3», если критерии выставления оценок определялись по таблице?

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Количество выполненных заданий	0-1	2-3	4	5

3. На диаграмме показано количество SMS, присланных слушателями за каждый час четырёхчасового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообщений было прислано за последние два часа программы по сравнению с первыми двумя часами этой программы.

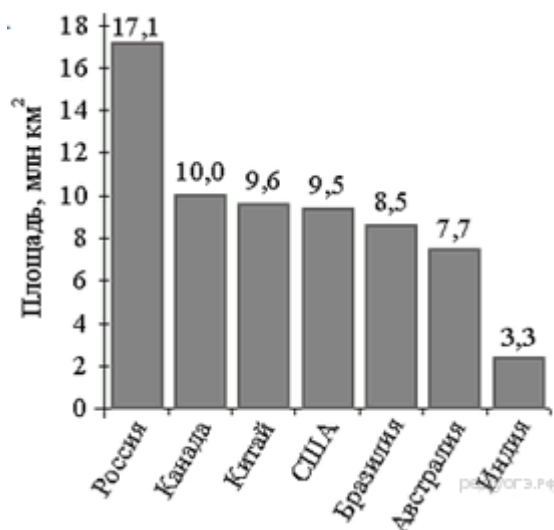


4. На рисунке изображена зависимость температуры (в градусах Цельсия) от высоты (в метрах) над уровнем моря.



Определите по графику, на сколько градусов температура на высоте 200 метров выше, чем на высоте 650 метров.

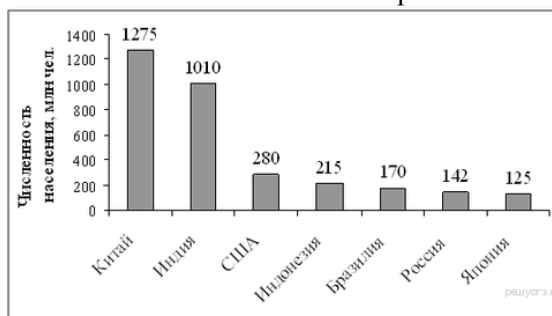
5. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км<sup>2</sup>) стран мира.



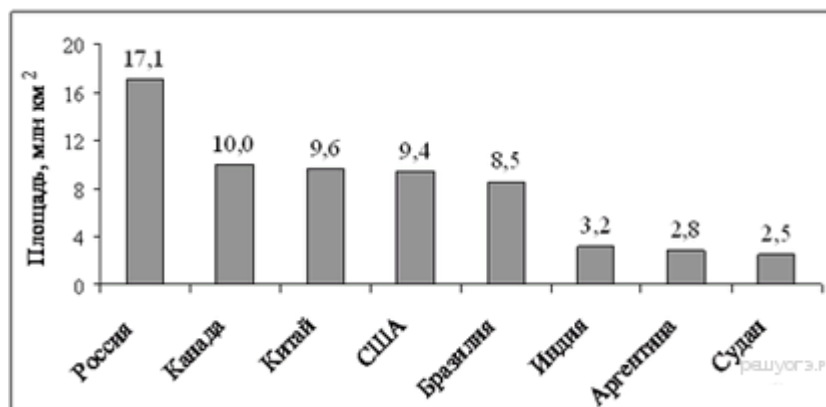
Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Казахстан входит в семёрку крупнейших по площади территории стран мира.
- 2) Площадь территории Бразилии составляет 8,5 млн км<sup>2</sup>.
- 3) Площадь Австралии больше площади Китая.
- 4) Площадь Бразилии больше площади Индии более чем в три раза.

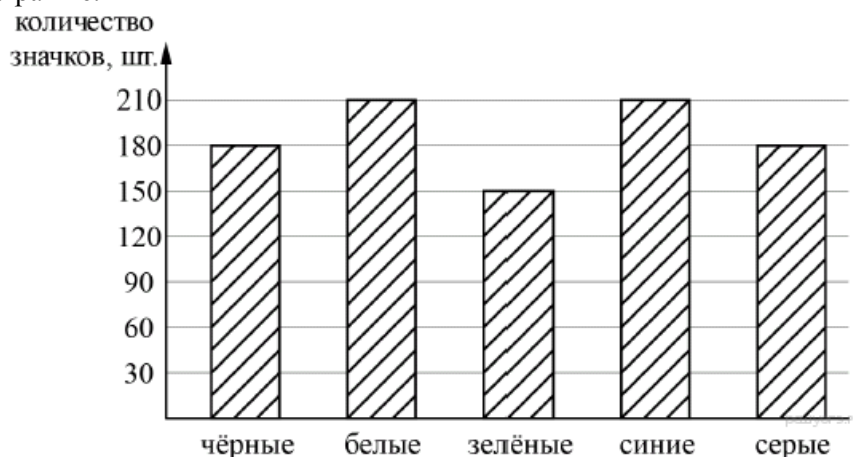
6. На диаграмме представлены некоторые из крупнейших по численности населения стран мира. Численность населения какого государства примерно в 6 раз меньше численности населения Индии? В ответе напишите численность населения этой страны в млн чел.



7. На диаграмме представлены некоторые из крупнейших по площади территории стран мира. Во сколько примерно раз площадь России больше площади США? (Ответ округлите до целых.)



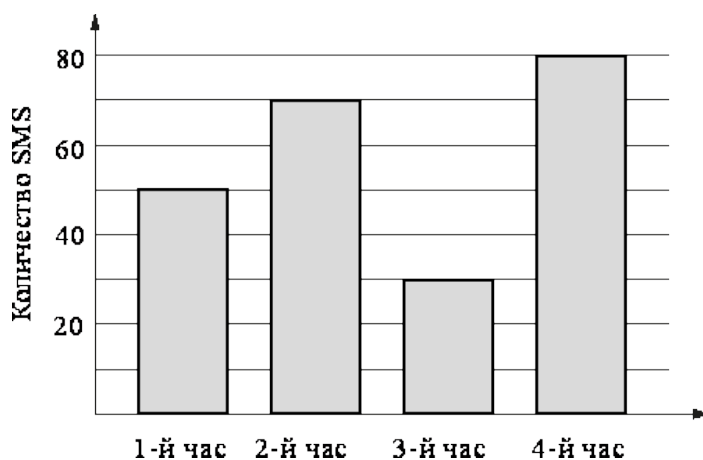
8. Рок-магазин продаёт значки с символикой рок-групп. В продаже имеются значки пяти цветов: чёрные, синие, зелёные, серые и белые. Данные о проданных значках представлены на столбчатой диаграмме.



Определите по диаграмме, значков какого цвета было продано меньше всего. Сколько примерно процентов от общего числа значков составляют значки этого цвета?

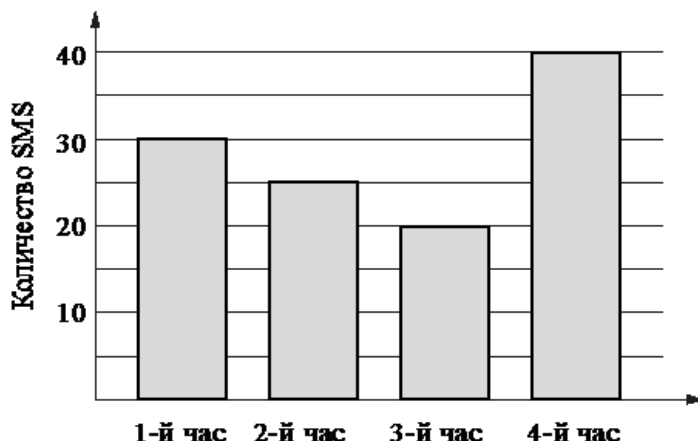
- 1) 5
- 2) 10
- 3) 15
- 4) 20

9. На диаграмме показано количество SMS, присланных слушателями за каждый час четырёхчасового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообщений было прислано за первые два часа программы по сравнению с последними двумя часами этой программы.



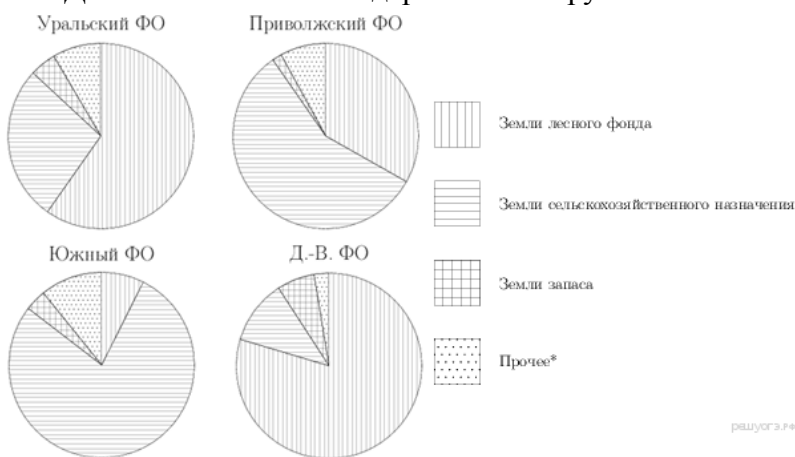
10. На диаграмме показано количество SMS, присланных слушателями за каждый час четырёхчасового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообще-

ний было прислано за последние два часа программы по сравнению с первыми двумя часами этой программы.



### Круговые диаграммы

1. На диаграмме показано распределения земель Уральского, Приволжского, Южного и Дальневосточного Федеральных округов по категориям. Определите по диаграмме, в каком округе доля земель лесного фонда превышает 70%.



в каком округе доля земель лесного фонда превышает 70%.

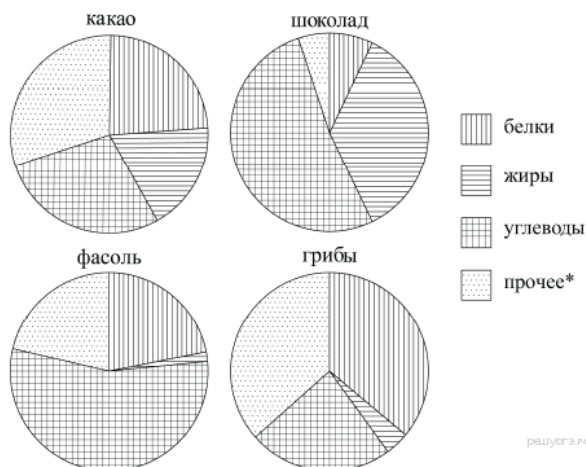
\*прочее — это земли поселений; земли промышленности и иного специального назначения; и земли особо охраняемых территорий и объектов.

- 1) Уральский ФО
- 2) Приволжский ФО
- 3) Южный ФО
- 4) Дальневосточный ФО

2. На диаграмме показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и сушёных белых грибах. Определите по диаграмме, в каком продукте содержание белков превышает 30%.

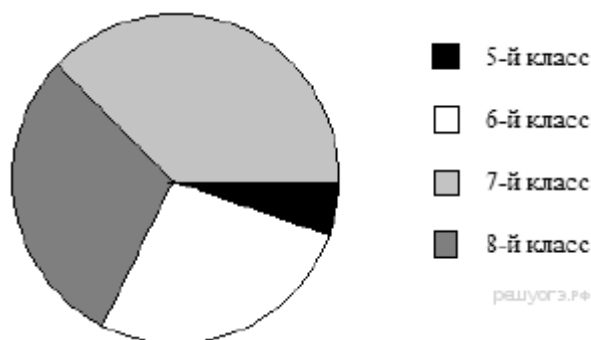
\*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

- 1) какао
- 2) шоколад
- 3) фасоль
- 4) грибы



3. В математические кружки города ходят школьники 5–8 классов. Распределение участников математических кружков представлено в круговой диаграмме.





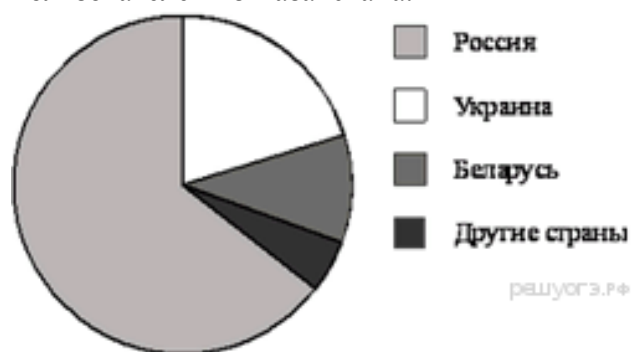
Какое утверждение относительно участников кружков верно, если всего их посещают 354 школьника?

- 1) в кружки не ходят пятиклассники
- 2) восьмиклассников ходит больше, чем семиклассников
- 3) больше половины участников кружков учатся не в седьмом классе
- 4) шестиклассников меньше 88 человек

4. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 12 млн пользователей.

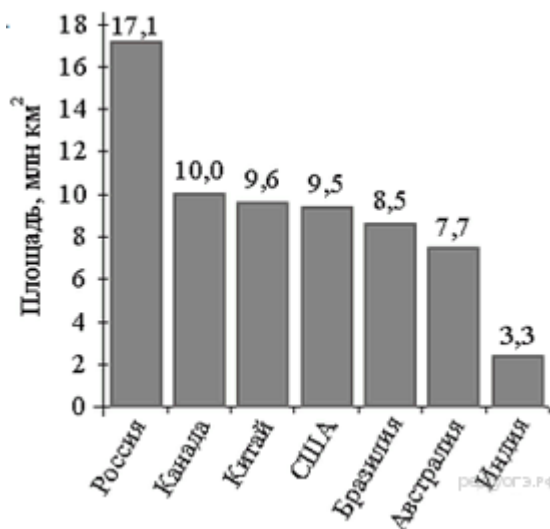
Какое из следующих утверждений неверно?

- 1) Пользователей из Украины больше, чем пользователей из Казахстана.
- 2) Пользователей из России вдвое больше, чем пользователей из Украины.
- 3) Примерно треть пользователей — не из России.
- 4) Пользователей из Украины и Беларуси более 3 млн человек.

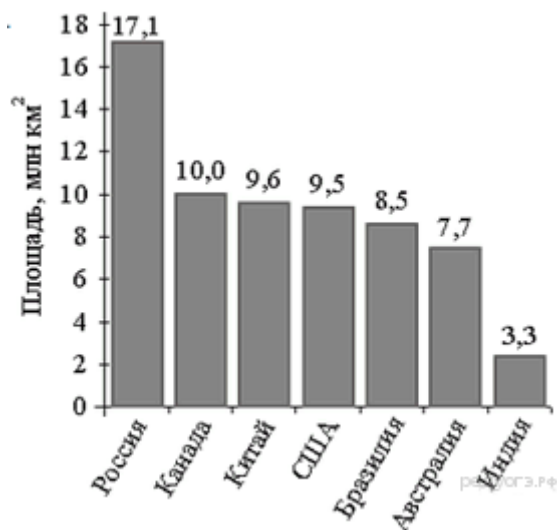


5. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км<sup>2</sup>) стран мира. Какое из следующих утверждений неверно?

- 1) Россия — крупнейшая по площади территории страна мира.
- 2) Площадь территории Индии составляет 3,3 млн км<sup>2</sup>.
- 3) Площадь Китая больше площади Австралии.
- 4) Площадь Канады больше площади США на 1,5 млн км<sup>2</sup>.



В ответе запишите номер выбранного утверждения.



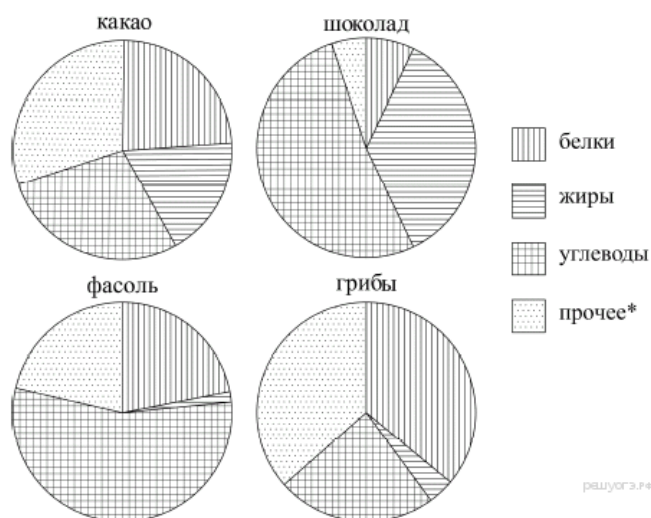
6. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км<sup>2</sup>) стран мира. Какое из следующих утверждений неверно?

- 1) По площади территории второе место в мире занимает Канада.
- 2) Площадь территории Австралии составляет 7,7 млн км<sup>2</sup>.
- 3) Площадь Китая больше площади Канады.
- 4) Площадь США больше площади Бразилии на 1 млн км<sup>2</sup>.

7. На диаграмме показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и сушёных белых грибах. Определите по диаграмме, в каком продукте содержание жиров находится в пределах от 15% до 25%.

\*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

- 1) какао
- 2) шоколад
- 3) фасоль
- 4) грибы



8. На диаграмме показано содержание питательных веществ в молочном шоколаде. Определите по диаграмме, содержание каких веществ преобладает.

\*-к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

- 1) жиры
- 2) белки
- 3) углеводы
- 4) прочее

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

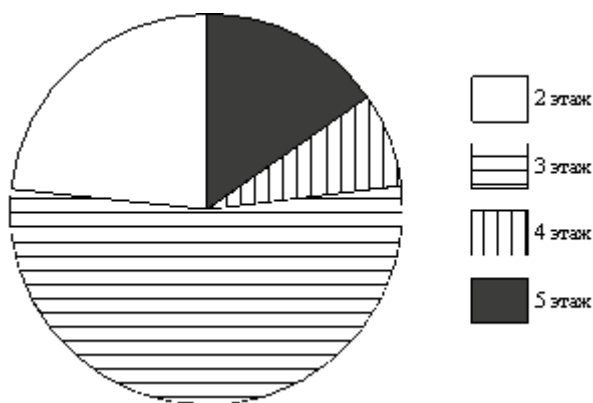
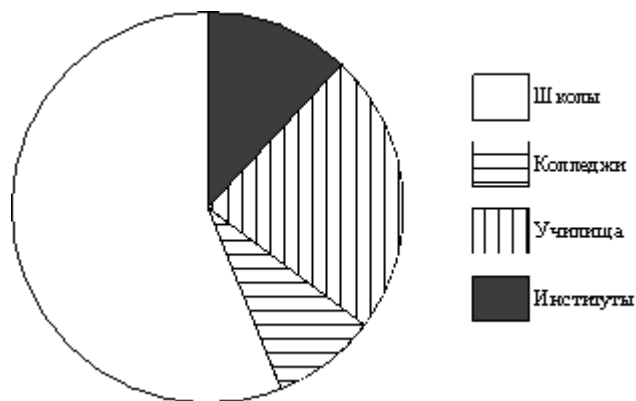
9. В городе из учебных заведений имеются школы, колледжи, училища и институты. Данные представлены на круговой диаграмме.

Какое из утверждений относительно количества учебных заведений разных видов верно, если всего в городе 45 учебных заведений?

- 1) В городе более 30 школ.
- 2) В городе более трети всех учебных заведений — институты.

3) В городе школ, колледжей и училищ более  $\frac{15}{16}$  всех учебных заведений.

4) В городе примерно четверть всех учебных заведений — училища.



ции?

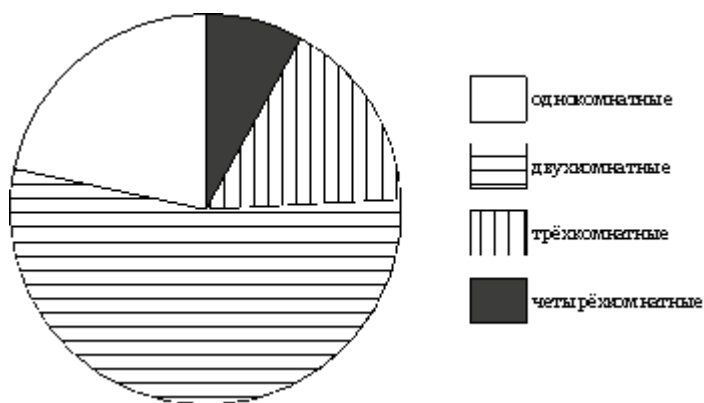
10. Участников конференции разместили в гостинице в одноместных номерах, расположенных на этажах со второго по пятый. Количество номеров на этажах представлено на круговой диаграмме.

Какое из утверждений относительно расселения участников конференции неверно, если в гостинице разместились 80 участников конференции?

- 1) Более 20 участников конференции разместились на втором этаже.
- 2) На 2, 4 и 5 этажах разместились меньше половины участников конференции.
- 3) На этажах выше третьего разместились не более четверти всех участников конференции.
- 4) На втором и третьем этаже разместились не менее 75% всех участников конференции.

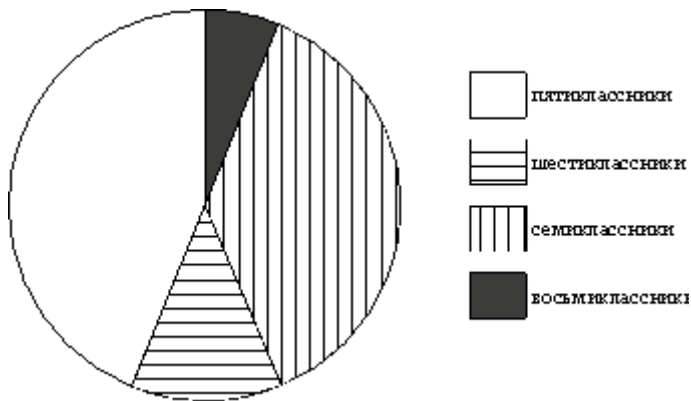
11. В доме располагаются однокомнатные, двухкомнатные, трёхкомнатные и четырёхкомнатные квартиры. Данные о количестве квартир представлены на круговой диаграмме.

Какие из утверждений относительно квартир в этом доме неверны, если всего в доме 180 квартир?



- 1) Больше половины квартир двухкомнатные.
- 2) Однокомнатных квартир менее четверти.
- 3) Четверть всех квартир — трёхкомнатные.
- 4) Однокомнатных, двухкомнатных и трёхкомнатных квартир всего более 165.

В ответе запишите номера выбранных утверждений.



12. В математический кружок ходят школьники 5–8 классов. Данные о количестве школьников, посещающих кружок, представлены на круговой диаграмме. Какое утверждение относительно участников кружка верно, если всего его посещают 60 школьников?

- 1) Больше трети школьников восьмиклассники.
- 2) Пятиклассников меньше, чем семиклассников.

- 3) Семиклассников больше 7 человек.
- 4) Шестиклассников больше 50% всех школьников.

13. На диаграмме показано содержание питательных веществ в какао-порошке. Определите по диаграмме, содержание каких веществ наименьшее.

\*-к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

- 1) жиры
- 2) белки
- 3) углеводы
- 4) прочее

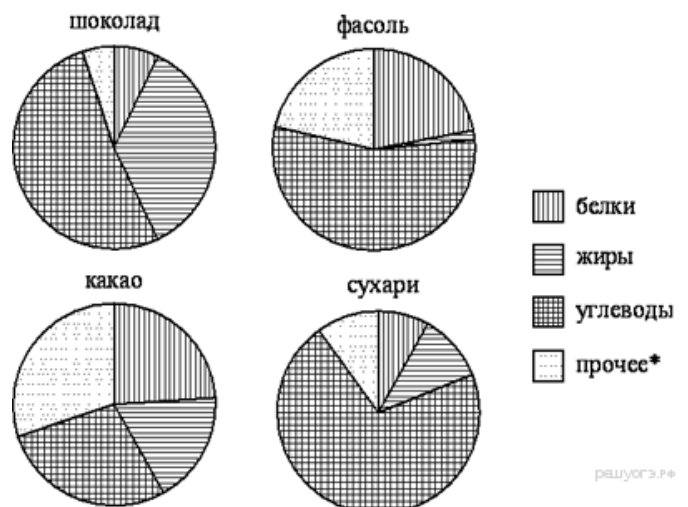


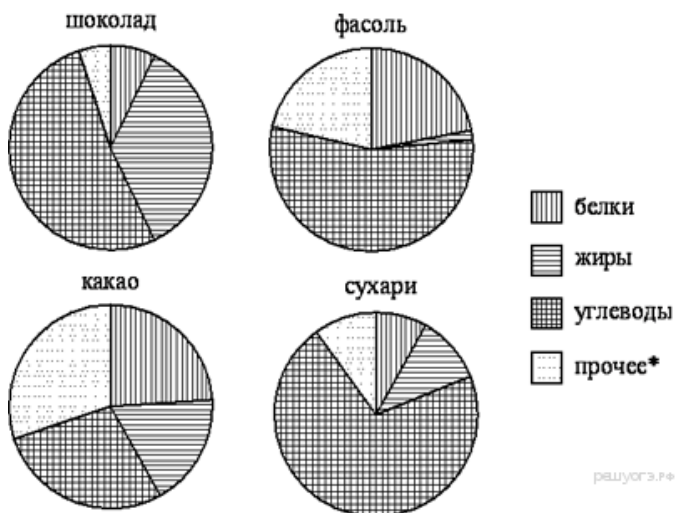
14. На диаграмме показано содержание питательных веществ в молочном шоколаде. Определите по диаграмме, содержание каких веществ превосходит 50%.

- 1) жиры
- 2) белки
- 3) углеводы
- 4) прочее

15. На диаграмме показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и сливочных сухарях. Определите по диаграмме, в каком продукте содержание углеводов наибольшее.

- 1) какао
- 2) шоколад
- 3) фасоль
- 4) сухари



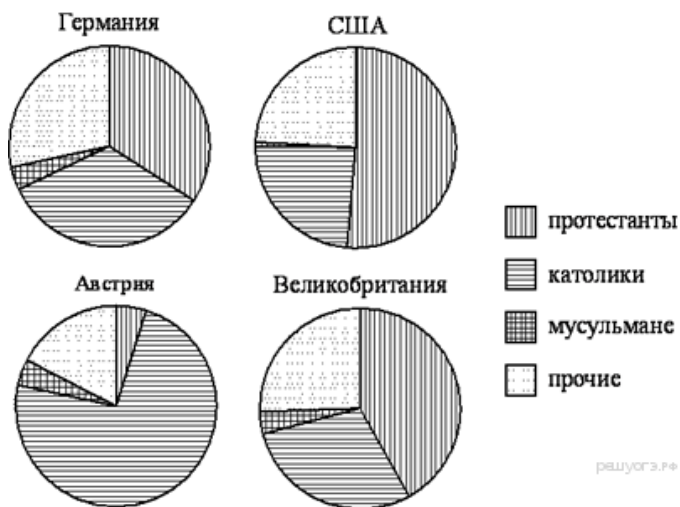


16. На диаграмме показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и сливочных сухарях. Определите по диаграмме, в каком продукте содержание углеводов наименьшее.

- 1) какао
- 2) шоколад
- 3) фасоль
- 4) сухари

17. На диаграмме показаны религиозные составы населения Германии, США, Австрии и Великобритании. Определите по диаграмме, в какой стране доля католиков превышает 50%.

- 1) Германия
- 2) США
- 3) Австрия
- 4) Великобритания



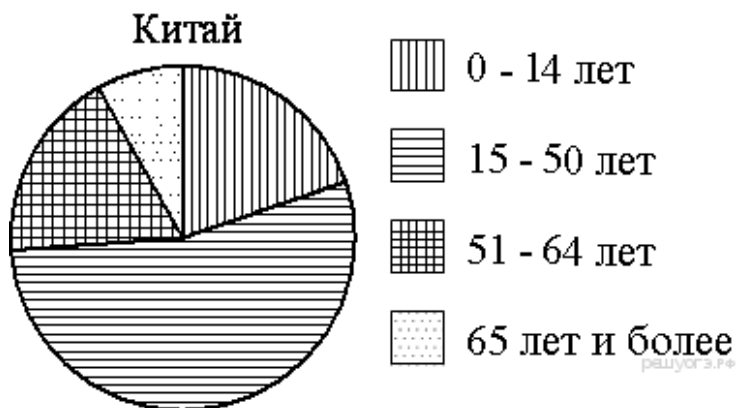
18. На диаграмме показано содержание питательных веществ в сливочных сухарях. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание углеводов.

- 1) 45-55%
- 2) 55-65%
- 3) 65-75%
- 4) 75-80%

19. На диаграмме показан возрастной состав населения Китая.

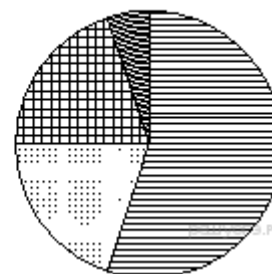
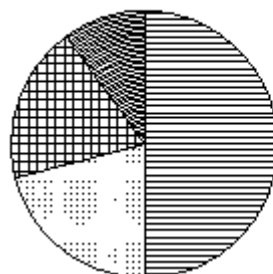
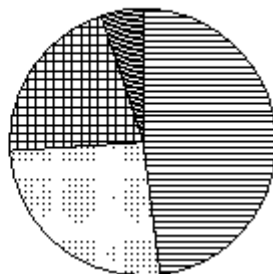
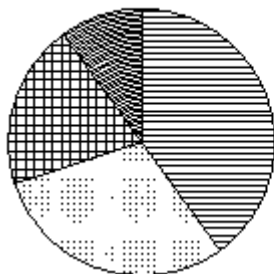
Сколько примерно людей младше 14 лет проживает в Китае, если население Китая составляет 1,3 млрд людей?

- 1) около 100 млн
- 2) около 260 млн
- 3) около 325 млн
- 4) около 150 млн



20. Какая из следующих круговых диаграмм показывает распределение площадей океанов в Мировом Океане, если Тихий Океан занимает около 48% всего Мирового Океана, Атлантический — 26%, Индийский — 21% и Северный Ледовитый — 5%?

1) Мировой Океан    2) Мировой Океан    3) Мировой Океан    4) Мировой Океан



### **Информационные источники:**

1. <http://www.mathematics-repetition.com> – Математика - повторение
2. <https://examer.ru> – Все для самостоятельной подготовки к ЕГЭ
3. <http://www.algebraclass.ru> – Справочная информация по алгебре
4. <http://www.yaklass.ru> – Образовательный проект Сколково
5. <http://www.egesdam.ru> – ЕГЭ? Сдам!
6. <https://math-oge.sdamgia.ru> – Решу ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам