

Типология и методология решения задач на преобразования выражений в школьном курсе математики.

Учитель математики Сарнадская Надежда Анатольевна
МБОУ Гимназия №1 г. Североморска, Мурманской области

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель данного курса — проработать выполнение заданий на тождественные преобразования тригонометрических, иррациональных, показательных и логарифмических выражений, поскольку они встречаются в ЕГЭ как в качестве отдельных заданий, так и используются для решения уравнений и неравенств, входящих в задания с развернутым ответом, так же комбинированных заданий. Для решения задач на преобразование и упрощение выражений требуется достаточно хорошо знать правила преобразования алгебраических выражений и тригонометрические формулы (уметь применять их как по одной, так и в комплексе).

Курс разбор основных методов решения различных выражений, практикумы, видео-лекции, итоговое тестирование, справочный материал. Старшеклассники успешно апробируют данный курс по мере изучения тем, включенных в данный курс. Постоянно осуществляется обратная связь «ученик – учитель».

1. Иррациональные выражения.

Пример 1.

Вычислить: $\sqrt[3]{4\sqrt{7}-8} \cdot \sqrt[3]{8+4\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{36}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{4\sqrt{7}-8} \cdot \sqrt[3]{8+4\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{(4\sqrt{7}-8) \cdot (8+4\sqrt{7})} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{16 \cdot 7 - 64} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{36} = 12 \text{ .}$$

Ответ: 12

Пример 2.

Найти значение выражения $\sqrt[8]{(x+2)^8} + \sqrt{(x-5,3)^2}$, если $-1,8 \leq x \leq 5,1$.

Решение:

При $-1,8 \leq x \leq 5,1$

$$x+2 > 0, x-5,3 < 0, \text{ то } \sqrt[8]{(x+2)^8} + \sqrt{(x-5,3)^2} = |x+2| + |x-5,3| = x+2 - x+5,3 = 7,3 \text{ .}$$

Ответ: 7,3

Пример 3. Прием: Выделение полного квадрата

Найти значение выражения $\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}$ при $x=4,198$.

Решение:

$$\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} = \sqrt{(x-4)-4}\sqrt{x-4+4} + \sqrt{(x-4)+4}\sqrt{x-4+4} = \\ \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}=|\sqrt{x-4}-2|+|\sqrt{x-4}+2|=2-\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4}+2=4.$$

(при $x = 4,198$ $|\sqrt{x-4}-2|=2-\sqrt{x-4}$).

Ответ: 4

Пример 4.

Упростить выражение: $\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})^2}-\sqrt{5}$.

Решение:

$$\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})^2}-\sqrt{5}=\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{5-4\sqrt{5}+4}-\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=\sqrt{5}-2--\sqrt{5}=-2$$
 .

Ответ: -2.

Пример 5.

Найти значение выражения: $\frac{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}=\sqrt[3]{\frac{12\sqrt[3]{8\cdot 3}+6\sqrt[3]{125\cdot 3}}{2\sqrt[3]{3}}}=\sqrt[3]{\frac{24\sqrt[3]{3}+30\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}}}=\sqrt[3]{\frac{24+30}{2}}=3$$

Ответ: 3

Пример 6.

Найти значение выражения: $\left(1,63\sqrt{2\sqrt[5]{16}}+0,37\sqrt[5]{16\sqrt{2}}\right)^{-\frac{20}{19}}$.

Решение:

$$\left(1,63\sqrt{2\sqrt[5]{16}}+0,37\sqrt[5]{16\sqrt{2}}\right)^{-\frac{20}{19}}=\left(1,63\cdot 2^{\frac{9}{10}}+0,37\cdot 2^{\frac{9}{10}}\right)^{-\frac{20}{19}}=\left((1,63+0,37)\cdot 2^{\frac{9}{10}}\right)^{-\frac{20}{19}}=\left(2\cdot 2^{\frac{9}{10}}\right)^{-\frac{20}{19}}=\left(2^{\frac{19}{10}}\right)^{-\frac{20}{19}}=2^{-2}$$

Ответ: 0,25.

Пример 7.

Найти значение выражения: $\left(\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}-\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}\right)^{-12}$.

Решение:

$$\left(\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}-\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}\right)^{-12}=\left(3\cdot 2^{\frac{1}{12}}-2\cdot 2^{\frac{1}{12}}\right)^{-12}=2^{-1}=0,5$$

Ответ: 0,5

2. Практикум «Иррациональные выражения»

Задания для самостоятельного решения.

- 1) Вычислить: $\sqrt[3]{12-2\sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{11}+12} \cdot \sqrt[3]{80}$.
- 2) Найти значение выражения: $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{(x-7,5)^4}$, если $3,1 \leq x \leq 7,2$.
- 3) Упростить выражение: $\sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$.
- 4) Найти значение выражения: $\sqrt{x-6}\sqrt{x-9} + \sqrt{x+6}\sqrt{x-9}$ при $x=9,693$.
- 5) Найти значение выражения: $27 \cdot \left(10,6\sqrt{3\sqrt[3]{9}} - 9\frac{3}{5}\sqrt[3]{9\sqrt{3}} \right)^{\frac{-18}{5}}$.
- 6) Найти значение выражения: $\left(2\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}} - 3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}} \right)^{-4,8}$.
- 7) Вычислите: $\left(3,7\sqrt[3]{64\sqrt{8}} + 4,3\sqrt{8\sqrt[3]{64}} \right)^{\frac{2}{11}}$.
- 8) Найдите значение выражения $\sqrt{a-22}\sqrt{a-121} - \sqrt{a+22}\sqrt{a-121}$
при $a = 262,262$

3. Ответы к практикуму «Иррациональные выражения»

Ответы:

- 1) 20; 2) 4,5; 3) 2; 4) 6; 5) 1; 6) 0,25; 7) 2; 8) -22.

4. Итоговый зачет «Преобразование иррациональных выражений»

1. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(10-x)^4} + \sqrt{(x-12)^2}$, если $10,5 \leq x \leq 11,9$.
2. Найдите значение выражения $\left(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}} - \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}} \right) \cdot \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}$.
3. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}}{\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$.
4. Найдите значение выражения $\sqrt{43-30\sqrt{2}} + \sqrt{43+30\sqrt{2}}$.
5. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{(x-8,5)^6} + \sqrt[4]{(x-12,5)^4}$, если $9,2 \leq x \leq 12,2$.
7. Найдите значение выражения $\left(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}} - \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}} \right) \cdot \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}$.

8. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.
9. Найдите значение выражения $\frac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}+\sqrt{2}$.
10. Найдите значение выражения $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.
11. Вычислите: $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{14+6\sqrt{5}}$.
12. Вычислите: $(4-3\sqrt{2})\cdot\sqrt{34+24\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{5832}$.
13. Вычислите: $\left(\sqrt{(2,5)^2-5\sqrt{8}+8}-\sqrt[3]{(\sqrt{8}-3)^3}\right)^2-(1,5)^2$.
14. Вычислите: $\sqrt{\frac{4^5\cdot 81^2\cdot 6^4}{\left(2\cdot 5^{\lg 3}\cdot (\sqrt{2})^{\lg 9}\right)^{10}}}$.
15. Вычислите: $\sqrt[6]{21+12\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{3-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{72}$.
16. Найдите значение числового выражения: $\sqrt{18-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt{18+2\sqrt{17}}$.
17. Упростите выражение $\sqrt{m^2-2mn+n^2}$ и найдите его значение при $m = 3,5; n = 8,4$.
18. Вычислите значение выражения $16^{-\frac{5}{4}}-(0,01)^{-\frac{1}{2}}+12\cdot(7^0)^3-16\cdot 2^{-5}\cdot 64^{-\frac{2}{3}}$.
19. Упростите выражение $\frac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1}-\frac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right)$ и найдите его значение при $m = 16$.
20. Вычислите значение выражения $625^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-3}\cdot 25+7\cdot(4^0)^4-25^{-3\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.
21. Упростите выражение $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}$ и найдите его значение при $a = 25$.
22. Вычислите значение выражения $5^{\frac{3}{5}}\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{1}{27}}\right)-\frac{2}{5\log_5 3}+\frac{6}{5}\log_3 5$.

5. Ответы к итоговому зачету «Преобразования иррациональных выражений»

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

вопрос а																
Ответ	2	3	2	3	10	4	2	4	2	2	2	-36	-2	12	-6	16

№ вопрос а	17	18	19	20	21	22
Ответ	4,9	2	5	7,5	1	4

6. Показательные и логарифмические выражения.

Пример 1.

Найти значение выражения: $\log_{\sqrt[5]{5}} \sqrt{5} + \log_3 48 - \log_3 4 \cdot 15^{\log_{15} 4} \cdot 16$.

Решение:

$$\log_{\sqrt[5]{5}} \sqrt{5} + \log_3 48 - \log_3 4 \cdot 15^{\log_{15} 4} \cdot 16 = \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \log_5 5 + \log_3 \frac{48}{16} \right) \cdot 4 = \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \cdot 4 = 14.$$

Ответ: 14.

Пример 2.

Найти значение выражения: $7 \cdot \log_3 625 \cdot \log_5 27 + 3^{\log_{15} 7} \cdot 5^{\log_{15} 7}$.

Решение:

$$7 \cdot \log_3 625 \cdot \log_5 27 + 3^{\log_{15} 7} \cdot 5^{\log_{15} 7} = 7 \cdot \log_3 5^4 \cdot \log_5 3^3 + 15^{\log_{15} 7} = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 7 = 84 + 7 = 91.$$

Ответ: 91.

Пример 3.

Найти значение выражения: $\sqrt{36 + 25^{\log_8 5}^{-1}} + \sqrt{(\log_6 9 + \log_6 4)^3 + 28}$.

Решение:

$$\sqrt{36 + 25^{\log_8 5}^{-1}} + \sqrt{(\log_6 9 + \log_6 4)^3 + 28} = \sqrt{36 + 25^{\frac{1}{\log_8 5}}} + \sqrt{(\log_6 (9 \cdot 4))^3 + 28} = \sqrt{36 + 25^{\log_5 8}} + \sqrt{2^3 + 28} = \sqrt{36 + 5^{2 \log_5 8}} + \sqrt{36 + 5^{2 \log_5 2}}$$

Ответ: 16.

Пример 4.

Вычислить: $1,7 \left(\frac{\log_5 150}{\log_6 5} - \frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} \right)$.

Решение:

$$1,7 \left(\frac{\log_5 150}{\log_6 5} - \frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} \right) = 1,7 \left(\log_5 (25 \cdot 6) \cdot \log_5 6 - \log_5 (5 \cdot 6) \cdot \log_5 (5 \cdot 6) \right) = 1,7 \left((2 + \log_5 6) \cdot \log_5 6 - (1 + \log_5 6) \cdot \log_5 6 \right)$$

Ответ: $-1,7$.

Пример 5.

Вычислить: $7^{\log_{21} 13} \cdot 3^{\log_{21} 13} - 1,5 \cdot \log_5 8 \cdot \log_2 5$.

Решение:

$$7^{\log_{21} 13} \cdot 3^{\log_{21} 13} - 1,5 \cdot \log_5 8 \cdot \log_2 5 = 21^{\log_{21} 13} - 1,5 \log_5 2^3 \cdot \log_2 5 = 13 - 4,5 = 8,5$$

Ответ: $8,5$

Пример 6.

Найти значение выражения: $\frac{\log_2 44}{\log_{88} 2} - (5 + \log_2 11) \cdot \log_2 11$.

Решение:

$$(4 \cdot 11) \cdot \log_2 (8 \cdot 11) - (5 + \log_2 11) \cdot \log_2 11 = (2 + \log_2 11) \cdot (3 + \log_2 11) - 5 \log_2 11 - (\log_2 11)^2 = 6$$

$$\frac{\log_2 44}{\log_{88} 2} - (5 + \log_2 11) \cdot \log_2 11 = \log_2 6$$

Ответ: 6 .

Пример 7.

Найти значение выражения: $\sqrt{100 - 20 \cdot 6^x + 36^x} - 6^x - 2,5$, если $4^x = 19$

Решение:

$$\sqrt{100 - 20 \cdot 6^x + 36^x} - 6^x - 2,5 = \sqrt{(10 - 6^x)^2} - 6^x - 2,5 = |10 - 6^x| - 6^x - 2,5 = -10 + 6^x - 6^x - 2,5 = -12,5$$

Ответ: $-12,5$.

Пример 8.

Вычислить значение выражения: $e^{\ln 4} + 196^{\log_{14} \sqrt{10}}$.

Решение:

$$e^{\ln 4} + 196^{\log_{14} \sqrt{10}} = 4 + 14^{2 \log_{14} \sqrt{10}} = 4 + 14^{\log_{14} 10} = 4 + 10 = 14$$

Ответ: 14 .

Пример 9.

Вычислить значение выражения: $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{8} - 27}{\sqrt{2} - 3} - 3 \cdot \sqrt{2} + 5 \right)$.

Решение:

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{8} - 27}{\sqrt{2} - 3} - 3 \cdot \sqrt{2} + 5 \right) = -\log_4 \left(\frac{(\sqrt{2} - 3)(2 + 3\sqrt{2} + 9)}{\sqrt{2} - 3} - 3\sqrt{2} + 5 \right) = -\log_4 16 = -2$$

Ответ: -2 .

В рассмотренных ниже примерах будет использоваться свойство:

При любых $a > 0 (a \neq 1)$, $x > 0$, $y > 0$ выполняется равенство:

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

Пример 10.

Вычислить: $2^{\log_3 5} \cdot 5^{3 \log_3 0,5} \cdot 4^{\log_9 25}$.

Решение:

$$\begin{aligned} 2^{\log_3 5} \cdot 5^{3 \log_3 0,5} \cdot 4^{\log_9 25} &= 5^{\log_3 2} \cdot 5^{\log_3 0,125} \cdot 4^{\log_3 5} = 5^{\log_3 2} \cdot 5^{\log_3 0,125} \cdot 5^{\log_3 4} = \\ &= 5^{\log_3 2 + \log_3 0,125 + \log_3 4} = 5^{\log_3 (2 \cdot 0,125 \cdot 4)} = 5^{\log_3 1} = 5^0 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Пример 11.

$$9^{\log_2 7} \cdot 3^{\log_4 49} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_2 27}.$$

Вычислить:

Решение:

$$\begin{aligned} 9^{\log_2 7} \cdot 3^{\log_4 49} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_2 27} &= 3^{2 \log_2 7} \cdot 3^{\log_2 7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3 \log_2 3} = 3^{\log_2 49} \cdot 3^{\log_2 7} \cdot \left(\frac{1}{7^3}\right)^{\log_2 3} = \\ &= 3^{\log_2 49} \cdot 3^{\log_2 7} \cdot 3^{\log_2 \left(\frac{1}{7^3}\right)} = 3^{\log_2 49 + \log_2 7 + \log_2 \left(\frac{1}{7^3}\right)} = 3^{\log_2 \left(49 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7^3}\right)} = 3^{\log_2 1} = 3^0 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

7. Тренажер

Тренажер «Логарифмические выражения»

1. Найдите значение выражения $5^{3 + \log_5 2}$.

2. Найдите значение выражения $64^{\log_8 \sqrt{3}}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 7}{\log_4 7}$.

4. Найдите значение выражения $\log_5 7 \cdot \log_7 25$.

5. Найдите значение выражения $104 \log_3 \sqrt[8]{3}$.

6. Найдите значение выражения $\log_4 \log_5 25$
7. Найдите значение выражения $\log_6 270 - \log_6 7,5$
8. Найдите значение выражения $6 \cdot 7^{\log_7 2}$.
9. Найдите значение выражения $\frac{24}{3^{\log_3 2}}$.
10. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$.
11. Найдите значение выражения $\log_3 8,1 + \log_3 10$.
12. Найдите значение выражения $3^{\log_9 16}$.
13. Найдите значение выражения $\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$.
14. Найдите значение выражения $\frac{\log_6 \sqrt{11}}{\log_6 11}$.
15. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 7}$.
16. Найдите значение выражения $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12)$.
17. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 2$.
18. Найдите значение выражения $\log_{10} 100$.
19. Найдите значение выражения $\log_{25} 3125 + \log_{0,04} 0,008$.
20. Найдите значение выражения $\log_{0,2} 10 - \log_{0,2} 2$.
21. Найдите значение выражения $\frac{6^{\log_{12} 432}}{6^{\log_{12} 3}}$.
22. Найдите значение выражения $\frac{\log_6 180}{2 + \log_6 5}$.
23. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2$.
24. Найдите значение выражения $\log_{1,25} 7 \cdot \log_7 0,8$.
25. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{11}}^2 121$.

26. Найдите значение выражения $8^{2+\log_8 13}$.

27. Найдите значение выражения $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$.

28. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[6]{13}} 13$.

8. Практикум «Показательные и логарифмические выражения»

Задания для самостоятельного решения.

1) Вычислить $32^{\log_2 \sqrt[5]{\sqrt{2}-19}} - 25^{\log_5 \sqrt{\sqrt{2}-17}}$.

2) Вычислить: $2,1 \left(\frac{\log_9 162}{\log_2 9} - \frac{\log_9 18}{\log_{18} 9} \right)$.

3) Вычислить: $\frac{-12}{11} \log_3 (4 \sqrt[3]{9\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt[3]{9}})$.

4) Найти значение выражения: $7 \cdot \log_{12} 625 \cdot \log_5 144 + 3^{\log_{15} 11} \cdot 5^{\log_{15} 11}$.

5) Найти значение выражения: $8 \cdot \log_3 32 \cdot \log_2 81 + 3^{\log_6 11} \cdot 2^{\log_6 11}$.

6) Найти значение выражения: $(2^{\frac{1,6 - \log_5 8 + 3}{\log_{25} 6 \cdot 6^{2 \log_6 3}}})$.

7) Вычислить: $6 \cdot \log_2 125 \cdot \log_5 2 + 2^{\lg 7} \cdot 5^{\lg 7}$.

8) Найти значение выражения: $\sqrt{49 - 14 \cdot 5^x + 25^x} - 5^x - 2,5$, если $4^x = 19$.

9) Вычислить значение выражения: $-10^{\lg 5} + 225^{\log_{15} \sqrt{11}}$.

10) Найти значение выражения: $\frac{(5\sqrt{5} - \sqrt{18}) + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{3} + \sqrt{18})}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}}$.

9. Ответы к практикуму «Показательные и логарифмические выражения»

Ответы:

1) -2; 2) -2,1; 3) -2; 4) 67; 5) 171; 6) 18; 7) 25; 8) -9,5; 9) 6; 10) -1.

10. Зачет «Преобразования логарифмических выражений»

1. Вычислите: $5,5 \left(\frac{\log_5 50}{\log_2 5} - \frac{\log_5 10}{\log_{10} 5} \right)$
2. Вычислите: $\frac{2\log_6 2}{\log_4 6} - \frac{2\log_6 9 + \log_{36} 16}{\log_3 6}$
3. Вычислите: $\sqrt[12]{\frac{\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(4-\sqrt{5})}{\log_2(2\sqrt{3})}} - \sqrt{5}$
4. Найдите значение выражения $\log_{\pi^3} \left(\frac{mn^3}{\pi} \right)$, если $\log_{\pi^2} \sqrt{m} = \log_{\pi^2} n = 1$
5. Вычислите значение выражения $\left((1 - \log_5^2 35) \cdot \log_{175} 5 + \log_5 35 \right) \cdot 2^{\log_2 5}$
6. Вычислите значение выражения $\log_{a^3 b} \pi^7$, если $\log_{\sqrt{\pi}} a = \log_{\pi^2} b = 2$
7. Вычислите значение выражения $\log_{e^2} \frac{e^5}{a^2 b^3}$, если $\log_{e^3} b = \log_{e^3} \frac{1}{a} = 1$
8. Вычислите значение выражения $\frac{\log_3 150 \log_3 30}{\log_3 5 \log_3 5} \cdot \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 25$
9. Вычислите значение выражения $\lg \frac{\log_6 6}{\log_4 4} + \frac{\log_8 8}{\log_6 6}$
10. Упростите выражение $2^{\log_5 3} \log_5 25$
11. Вычислите значение выражения $\left((1 - \log_5^2 5) \log_5 352 \right) \log_5 2$
12. Вычислите значение выражения $\log_{32} 150 \log_{27} 68 \log_6 \sqrt[5]{\dots}$

11. Ответы к зачету «Преобразования логарифмических выражений»

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	-5,5	4	7	3	5	1	1	4	2	1	5	1,6				

12. Дополнительные материалы

1. Тест Иррациональные выражения

1. Упростите выражение: $\left(b^{\frac{5}{6}} \right)^3 \cdot \sqrt[4]{b^3}$

$$1) b^{\frac{13}{4}}; \quad 2) b^{\frac{15}{8}}; \quad 3) b; \quad 4) b^{\frac{23}{6}}.$$

2. Упростите выражение $\sqrt{2a^5} \cdot \sqrt{18a^2}.$

$$1) 6a^{\frac{2}{7}}; \quad 2) 6a^5; \quad 3) a^{\frac{2}{7}}; \quad 4) 6a^{\frac{7}{2}}.$$

3. Упростите выражение $\frac{\sqrt[4]{3\sqrt{m}}}{\sqrt[5]{\sqrt{m}}}.$

$$1) \frac{1}{\sqrt[84]{m^5}}; \quad 2) 1; \quad 3) \frac{1}{\sqrt[12]{m}}; \quad 4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[60]{m}}.$$

4. Упростите выражение: $\frac{4 \cdot \sqrt[6]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt[3]{4}}}.$

$$1) 4\sqrt{2}; \quad 2) 2\sqrt{2}; \quad 3) -4\sqrt{2}; \quad 4) \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

5. Упростите выражение: $a^{-3} \cdot \sqrt{9a^{18}}.$

$$1) 3\sqrt{a}; \quad 2) 9a^{15}; \quad 3) 3a^{12}; \quad 4) 3a^6.$$

6. Упростите выражение $\sqrt[4]{256a^4b^8c^{12}},$ если $a < 0, c < 0.$

$$1) 4ab^2c^3; \quad 2) -4ab^2c^3; \quad 3) 16ab^2c^3; \quad 4) 2ab^2c^3.$$

7. Упростите выражение $\sqrt[3]{16ab^{12}} : \sqrt[3]{2a^4b^9}.$

$$1) \frac{2b}{a}; \quad 2) 2ab; \quad 3) 2a^3b; \quad 4) 2ab^3.$$

8. Упростите для отрицательного a выражение $\sqrt[3]{54a^{2\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{24a^{\frac{2}{3}}}.$

$$1) 6a^{\frac{2}{3}}; \quad 2) 6a\sqrt[3]{6}; \quad 3) 12a; \quad 4) 12a^{\frac{2}{3}}.$$

9. Упростите выражение $\frac{(\sqrt[3]{b^{-2}})^2 \cdot b^3}{(\sqrt[3]{b})^2}.$

$$1) \frac{1}{b}; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{b}}; \quad 3) b; \quad 4)$$

$$\sqrt{b}.$$

10. Упростите выражение $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt{a^3}.$

$$1) a^{\frac{15}{2}}; \quad 2) a^{\frac{15}{4}}; \quad 3) a^4; \quad 4) a^{\frac{16}{15}}.$$

11. Вычислите $\sqrt[4]{(-2\sqrt{2})^4}.$

$$1) 3\sqrt{2}; \quad 2) -3\sqrt{2}; \quad 3) 6; \quad 4) -6$$

12. Упростите выражение $\frac{x}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^5}{x^2}} : \sqrt[3]{\frac{xy^4}{8}}$.
- 1) $y^{\frac{1}{6}}$; 2) $y^{\frac{1}{6}} + 4$; 3) $y^{\frac{1}{3}}$; 4) y .
13. Упростите выражение $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.
- 1) 8; 2) 5; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.
14. Упростите выражение $\sqrt[3]{4\sqrt{4m^6}}$.
- 1) $4m^2$; 2) $2m$; 3) $2m^{\frac{1}{2}}$; 4) $2m^3$.
15. Упростите для отрицательного a выражение $\sqrt[3]{-64\sqrt{a^{18}}}$.
- 1) $-2a^3$; 2) $4a^{-3}$; 3) $4a^3$; 4) $-4a^6$.
16. Упростите выражение $\sqrt[4]{2m^4} \cdot \sqrt[4]{128m^8}$, $m > 0$.
- 1) $2\sqrt{3m}$; 2) $4m^3$; 3) $2m^2$; 4) $8m$.
17. Вычислите $0,3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{15} + 0,1$.
- 1) 9,1; 2) 2,9; 3) 89,9; 4) 8,9.
18. Упростите выражение $\sqrt[nk]{5^{nk} \cdot a^k}$.
- 1) 5^n ; 2) $5 \cdot \sqrt[k]{a}$; 3) $5 \cdot \sqrt[n]{a}$; 4) $5^{2nk} \cdot a^{k(n+1)}$.
19. Упростите выражение $a \cdot \sqrt[4]{81a^3}$.
- 1) $9a^{\frac{5}{2}}$; 2) $3a^{\frac{7}{3}}$; 3) $3a^{\frac{7}{4}}$; 4) $3a$.
20. Упростите выражение $\sqrt[5]{32a^8} \cdot \sqrt{a}$.
- 1) $32a$; 2) $2a^{\frac{9}{5}}$; 3) $2a^{\frac{5}{2}}$; 4) $2a^{\frac{21}{10}}$.
21. Упростите выражение $\frac{a^{17}}{\sqrt{4a^4}}$.
- 1) $2a^{17}$; 2) $0,5 \cdot a^{15}$; 3) $\frac{1}{2} a^{19}$; 4) $\frac{1}{4} a^{15}$.
22. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{3} \cdot \frac{1}{27}}}{\sqrt{27 \cdot \sqrt[3]{9}}}$.
- 1) 1; 2) 9; 3) -1; 4) $\frac{1}{9}$.

23. Упростите выражение $\sqrt[12]{a^4 b^3} \cdot \sqrt[12]{a^8 b^{21}} \cdot 4c$, если $a < 0, b > 0, c < 0$.
 1) $4ab^2c$; 2) $-4ab^2c$; 3) $4ab^2c^{12}$; 4) $4a^2bc$.

24. Упростите выражение $\frac{\sqrt[4]{2x^2} \cdot \sqrt[4]{128x^6}}{x}$, если $x < 0$.
 1) $4x$; 2) $2x$; 3) $-4x$; 4) $4x^2$.

25. Сократите дробь $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$:
 1) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ 2) $\sqrt[3]{x+y}$ 3) $\sqrt[3]{y-x}$ 4) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

26. Сократите дробь $\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$:

- 1) $\frac{1}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}$ 2) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}$ 3) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ 4) $\frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$

27. Вычислите: $\sqrt[4]{108}$. 1) 2 2) 9 3) 6 4) 3

28. Вычислите: $\sqrt[3]{0,12}$. 1) -6 2) 0,6 3) -0,6 4) -3

29. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{a^2 b}}$.

- 1) $\sqrt[6]{a}$ 2) $\sqrt[3]{b}$ 3) $a \sqrt[6]{b}$ 4) $b \sqrt[6]{a}$

30. Упростите выражение $\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}}$.

- 1) $\sqrt{a} \sqrt[3]{b}$ 2) $a \sqrt[3]{b}$ 3) $a \sqrt[3]{b}$ 4) $\sqrt{a} \sqrt[3]{b}$

31. Упростите выражение $\frac{\sqrt{2362} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt{5} \cdot 9}$.

- 1) $2\sqrt[3]{2}$ 2) $\sqrt[3]{2}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) 2

32. Упростите выражение $\frac{\sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{216}}$.

- 1) $3\sqrt{3}$ 2) 1 3) $\sqrt{3}$ 4) 3

33. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{625}}$.

- 1) 0,5 2) 0,4 3) 1 4) 0,2

34. Вычислите: $\sqrt[5]{64000} \cdot \sqrt[3]{16}$. 1) 6 2) 2 3) 12 4) 24

35. Упростите выражение $\frac{2\sqrt{\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{b}}$.
- 1) 2 2) b 3) 1 4) $2b$

2. Ответы теста «Преобразование иррациональных выражений»

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	1	4	4	2	4	1	1	2	3	3	3	3	1	2	3	2

№ вопроса	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Ответ	1	3	3	4	2	4	2	1	4	1	2	3	1	3	1	3

№ вопроса	33	34	35
Ответ	2	3	1

3. Тест «Логарифмические выражения»

- Найдите значения выражения $\log_3(9b)$, если $\log_3 b = 5$.
1) 25; 2) 10; 3) -8; 4) 7.
- Укажите значение выражения $\log_5 75 + \log_5 (25)^{-1}$.
1) 1; 2) $\log_3 3$; 3) $\frac{1}{\log_5 3}$; 4) 0.
- Вычислите: $\log_{0,5} 2 + \log_{\sqrt{2}} 4 + 0,3^{\frac{1}{3} \log_{0,3} 8}$.
1) 5; 2) 3; 3) 6; 4) 4.
- Найдите значение выражения $\log_{12} \sqrt{14} \cdot \log_{14} \sqrt{12}$.
1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) 2.
- Найдите значение выражения $25^{\log_5 2 + \log_5 6} - 1,4$.
1) 10,6; 2) 22,6; 3) 62,6; 4) 142,6.
- Найдите значения выражения $\log_2 \frac{b}{16}$, если $\log_2 b = 3$.

- 1) 1; 2) -7; 3) -1; 4) 7.
7. Укажите значение выражения $\log_2 50 - 2\log_2 5$.
1) 20; 2) 1; 3) $\log_2 30$; 4) $8\log_2 5$.
8. Упростите выражение $2^{\log_2 7} + 2\log_5 15 - \log_5 9$.
1) 32; 2) 15; 3) 4; 4) 9.
9. Вычислите $\log_4 32 + \log_4 \frac{1}{2}$.
1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) -2.
10. Вычислите: $\log_8 128 + \log_4 16$.
1) 8; 2) 12; 3) 6; 4) $4\frac{1}{3}$.
11. Найдите значение выражения $\log_3 9 - \log_9 27$.
1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) 1.
12. Найдите значения выражения $\log_3 m + \log_3 n$, если $\log_3 (3mn) = 3,5$.
1) -2,5; 2) 10,5; 3) 4,5; 4) 2,5.
13. Найдите значение выражения $\log_2 a^{\frac{1}{3}}$, если $\log_4 a^3 = 9$.
1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 9.
14. Найдите значение выражения $3^{\log_3 15 - \log_3 5} + 1$.
1) 4; 2) 11; 3) 76; 4) 16.
15. Найдите значение $\ln 10^k$, если $\lg e = n$.
1) $\frac{k}{n}$; 2) kn ; 3) n^k ; 4) $\frac{1}{n^k}$.
16. Найдите значение выражения $5^{\lg \pi} \cdot 2^{\lg \pi}$.
1) π ; 2) $7^{\lg \pi}$; 3) $\pi^{\ln 10}$; 4) $\pi^{\lg e}$.
17. Найдите значение выражения $8^{\log_2 3} - 11$.
1) -2; 2) -8; 3) 16; 4) 27.
18. Найдите значение выражения $2^{\log_2 49} -$.
1) 0 2) 5 3) 2 4) 47
19. Найдите значение выражения $8,5^{\log_6 \log_2 2}$.
1) 3 2) 4 3) 8,5 4) -8,5
20. Найдите значение выражения $11^{\log_{11} (\log_5 125)}$.
1) 3; 2) 5; 3) 11; 4) 125.
21. Найдите значение выражения $\log_6 18 + \log_6 (\log_2 (\log_5 625))$.
1) 2; 2) $\log_6 3 + 3$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\log_2 3$.
22. Найдите значение выражения $\log_{12} \log_9$.

- 1) $\log_6 12$ 2) 6 3) 2 4) 1
23. Найдите значение выражения $\log_6 72 \log_6 \frac{1}{2}$.
- 1) 2 2) \log_6^2 3) 1 4) $22 \log_6 2$
24. Найдите значение выражения $2^{2 \log_8 27}$.
- 1) 9 2) 6 3) 27 4) 3
25. Найдите значение выражения $2^{\log_3 5}$.
- 1) 7 2) 49 3) 14 4) 35
26. Найдите значение выражения $4^{\lg 10} \cdot \frac{e^{\ln 10}}{4}$.
- 1) 2,5 2) 40 3) 4 4) 10
27. Найдите значение выражения $1 - \log_3 (\log_3 125)$.
- 1) 3 2) 5 3) 13 4) 25
28. Найдите значение выражения $\log_5 \frac{25}{x}$ если $\log_5 x = \frac{1}{2}$.
- 1) 2,5 2) 1,5 3) 4 4) 0
29. Найдите значение выражения $\log_7 \frac{343}{x}$ если $\log_7 0,4 =$.
- 1) 3,4 2) 2,6 3) 5,5 4) 0,5
30. Найдите значение выражения $\log_8 2$ если $\log_3 5 = -$.
- 1) -1 2) -2 3) 0,5 4) 1
31. Найдите значение выражения $\log_8 (1 - a^2)$ если $\log_3 1,5 = -$.
- 1) 0 2) 1 3) $\sqrt{3}$ 4) 3
32. Найдите значение выражения $\log_3 \frac{5}{2}$ если $\log_4 0 =$.
- 1) $4 \frac{5}{8}$ 2) 25 3) 64 4) $4 \frac{5}{8}$
33. Найдите значение выражения $\log_6 24 \log_9$.
- 1) 3 2) 6 3) 2 4) 1
34. Найдите значение выражения $\log_4 278 \log_9 139$.
- 1) 1 2) 4 3) 2 4) 0,5
35. Вычислите: $0,5 \log_4 576 \log_9$
- 1) 3 2) 1,5 3) 2,5 4) 0,5

4. Ответы к тесту «Логарифмические выражения»

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	4	2	1	1	4	3	2	4	1	4	1	4	1	1	1	1

№ вопроса	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Ответ	3	3	1	1	1	3	4	1	2	4	1	4	4	2	2	2

№ вопроса	33	34	35
Ответ	1	4	2

5. Тест Преобразование степенных и иррациональных выражений

Тест 1

Преобразование степенных и иррациональных выражений

Вариант № 1

A1. Упростите $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{56} \cdot \sqrt[4]{81}}$

1) $\frac{1}{2}$	2) $\frac{9}{8}$	3) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{21}}$	4) $\frac{\sqrt[3]{21}}{2}$
------------------	------------------	-------------------------------------	-----------------------------

A2. Вычислите $\left(\left(\frac{25}{16} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{9}{16} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{-1}$

1) 1	2) 2	3) $\frac{32}{49}$	4) $\frac{2}{7}$
------	------	--------------------	------------------

A3. Упростите $(\sqrt{320} - 3 \cdot \sqrt[3]{24}) - (\sqrt{45} - 2 \cdot \sqrt[3]{81})$

1) $\sqrt[3]{3} + 5 \cdot \sqrt{5}$	2) $5 \cdot \sqrt{5}$	3) $-12 \cdot \sqrt[3]{13} + 5 \cdot \sqrt{5}$	4) $3 \cdot \sqrt[3]{3}$
-------------------------------------	-----------------------	--	--------------------------

A4. Вычислите $\sqrt[3]{48 + \sqrt[4]{254 + \sqrt[5]{32}}}$

1) 4	2) 3	3) 2	4) 1
------	------	------	------

A5. Упростите $\frac{\sqrt{22} - \sqrt{2}}{\sqrt{11} - 11} \cdot \sqrt{11}$

1) $\sqrt{11} - 2$	2) $-\sqrt{11}$	3) 11	4) $-\sqrt{2}$
--------------------	-----------------	-------	----------------

A6. Найдите значение выражения $25^b \cdot 5^{-3b}$, при $b = \frac{2}{3}$

1) $\sqrt[3]{25}$	2) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$	3) $5^{\frac{2}{3}}$	4) 5
-------------------	-----------------------------	----------------------	------

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$$

A7. Найдите значение выражения , при a=625, b=16

1) 6	2) 7	3) 2	4) 12
------	------	------	-------

1) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$	2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$	3) $\frac{1}{x-y}$	4) $x+y$
--------------------------------	--	--------------------	----------

$$\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}}$$

A8. Упростите

$$\frac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}} - 2a^{\frac{1}{6}}$$

A9. Упростите

1) $\left(1-a^{\frac{1}{6}}\right)^2$	2) $1-2a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{1}{3}}$	3) $1-2a^{\frac{1}{2}}$	4) $\left(1+a^{\frac{1}{6}}\right)^2$
---------------------------------------	---	-------------------------	---------------------------------------

$$\frac{\sqrt[4]{567k^3}}{\sqrt[4]{7k^{15}}}$$

A10. Упростите

1) $3k^3$	2) $3k^3 \cdot \sqrt[4]{49}$	3) $\frac{3}{k^3}$	4) $\frac{3 \cdot \sqrt[4]{49}}{k^3}$
-----------	------------------------------	--------------------	---------------------------------------

B1. Вычислите $\sqrt[4]{(9-4 \cdot \sqrt{5})^2} - \sqrt{5}$

B2. Вычислите $(0,001)^{-\frac{1}{3}} + 2^{-2} \cdot 64^{-\frac{2}{3}} \cdot 4 - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2 \cdot 5$

B3. Вычислите $\sqrt[5]{2\sqrt{2}-2} \cdot \sqrt[5]{2+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[5]{256}$

B4. Вычислите $\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{10}-16} - \sqrt[4]{16+8 \cdot \sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{54}$

$$\frac{\sqrt{y^3}-8}{0,5-\frac{1}{\sqrt{y}}} - 2 \cdot \sqrt{y} \cdot (y+4)$$

B5. Найдите значение выражения , при y=3

C1. Вычислите $\left(3,9 \cdot \sqrt[4]{25 \cdot \sqrt{5}} + 1,1 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{16}{13}}$

C2. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(2x+9)^4} - \sqrt{(x^2+4x)^2} - 2\sqrt{2}$ при x = - 1,1 - $\sqrt{8}$

Тест 1
Преобразование степенных и иррациональных выражений
Вариант № 2

A1. Упростите $\left(5^{-3} \cdot \frac{0,25}{320}\right)^{-\frac{1}{4}} - 0,1$

1) 9,9	2) 3,9	3) 6	4) 19,9
--------	--------	------	---------

A2. Вычислите $\sqrt{\left(15\frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}$

1) 2	2) 3	3) 3,5	4) $3,5^{\frac{2}{3}}$
------	------	--------	------------------------

A3. Упростите $2 \cdot \sqrt{289} - \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{56}$

1) 29	2) $39 + 2 \cdot \sqrt[3]{7}$	3) $29 - \sqrt[3]{7}$	4) $29 + \sqrt[3]{7}$
-------	-------------------------------	-----------------------	-----------------------

A4. Вычислите $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{625}}}$

1) 5	2) 1	3) 2	4) 8
------	------	------	------

A5. Упростите $\frac{\sqrt{66} - \sqrt{2}}{\sqrt{33} - 33} \cdot \sqrt{33}$

1) $\sqrt{33} - 2$	2) $-\sqrt{33}$	3) 33	4) $-\sqrt{2}$
--------------------	-----------------	-------	----------------

A6. Найдите значение выражения $\frac{2-a}{-4^{\frac{a}{b}}}$, при $a=2, b=4$

1) 0	2) 1	3) 2	4) 4
------	------	------	------

A7. Найдите значение выражения $\frac{x-y}{x^{0,5} + y^{0,5}} - \frac{y^{0,5} - y}{y^{0,5}}$, если $x=9, y=49$

1) 3,5	2) 2	3) -3	4) -12
--------	------	-------	--------

A8. Вычислить $\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{x^2}}$ при $x=216, y=27$.

1) 1	2) 2	3) 3	4) 4
------	------	------	------

A9. Упростите $\frac{x^{\frac{3}{4}} + 1}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1} - 2x^{\frac{1}{8}}$

1) $\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right)^2$	2) $1 - 2x^{\frac{1}{8}}$	3) $1 - x^{\frac{1}{8}}$	4) $\left(x^{\frac{1}{8}} - 1\right)^2$
---	---------------------------	--------------------------	---

$\frac{\sqrt[3]{375n^2}}{\sqrt[3]{3n^{14}}}$			
A10. Упростите			
1)	$5n^4 \cdot \sqrt[3]{9}$	2)	$5n^4$
3)	$\frac{5}{n^4}$	4)	$\frac{5 \cdot \sqrt[3]{9}}{n^4}$

B1. Вычислите $\sqrt{(12-6 \cdot \sqrt{3})^2 + 6\sqrt{3}}$

B2. Вычислите $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + (3^0)^4 \cdot 4$

B3. Вычислите $\sqrt[3]{3\sqrt{5-4}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{5+4}} \cdot \sqrt[3]{841}$

B4. Вычислите $\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{10-24}} \cdot \sqrt[4]{24+8 \cdot \sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{64}$

B5. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{y^3+27}}{1+\frac{3}{\sqrt{y}}} - \sqrt{y} \cdot (y+9)$, при $y=5$

C1. Вычислите $\left(4,2 \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \sqrt{2}} + 3,8 \cdot \sqrt[4]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt{8}}\right)^{\frac{2}{3}}$

C2. Найдите значение выражения $(\sqrt{10}+2,1) \cdot \sqrt{\sqrt{(x^2+1,5x)^2} - \sqrt[4]{(0,5x+1)^4}}$ при $x = 1,1 - \sqrt{10}$

Преобразование тригонометрических выражений.

Алгоритм преобразований тригонометрических выражений.

1. Постарайтесь пристально взглянуть на данное выражение, выделить особенности его структуры, увидеть формулы, которые бросаются в глаза.
2. Если выражение содержит разные тригонометрические функции одного аргумента, то попробуйте все функции выразить через одну или две тригонометрические функции. При этом тангенс или котангенс чаще всего (хотя и не обязательно) выражают через синус и косинус этого же угла.
3. Если в выражение входят тригонометрические функции разных аргументов, то попытайтесь свести все функции к одному аргументу.
4. Формулы приведения могут быть полезны для выражения тригонометрических функций через кофункцию.

5. Не забывайте о формулах сокращенного умножения: они могут иногда помочь при решении тригонометрического выражения.

6. Если в выражении нет нужного слагаемого, то его можно прибавить и сейчас же вычесть. Иногда полезно какое-то слагаемое представить в виде суммы двух или нескольких слагаемых. **Наконец единицу бывает полезным представить в виде** $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

7. Если в выражении нет нужного множителя, то на него можно умножить и сейчас же разделить данное выражение (при условии, что этот множитель отличен от нуля).

8. Если в выражение входят **степени тригонометрических функций**, то можно обратиться к **преобразованиям, понижающим степени**. Они основываются на формулах:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

9. Если в выражение входят **тригонометрические функции разных аргументов**, то можно обратиться к **преобразованиям, понижающим аргумент**. Они основываются на формулах:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

1. Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента. Формулы приведения.

Пример 1.

Найдите $3 \cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$.

Решение:

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{8}{9} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$$

Так как $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$, а в III четверти $\cos \alpha < 0$, то $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

Тогда $3 \cos \alpha = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.

Ответ: -1

Пример 2.

Найдите $3 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,8$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

Решение:

Применяя формулу приведения, получим: $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$, тогда

$$3 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 3 \cos \alpha.$$

Из основного тригонометрического тождества найдем $\cos \alpha$, зная, что $\sin \alpha = -0,8$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

$$(-0,8)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$0,64 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 0,6$$

Так как $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$, а в IV четверти $\cos \alpha > 0$, то $\cos \alpha = 0,6$.

Тогда $3 \cos \alpha = 3 \cdot 0,6 = 1,8$.

Ответ: 1,8.

Пример 3.

Упростить выражение:
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)}.$$

Решение:

Воспользуемся формулами приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\text{Тогда } \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha \cdot (-\operatorname{tg} \alpha)}{-\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} = -1$$

Ответ: -1 .

Пример 4.

Упростить выражение:
$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} - \left(\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{2\alpha}{3}\right) + 1\right)^2.$$

Решение:

Применив формулу $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ и формулы приведения, получим:

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2\alpha}{3}\right)} - \left(tg\left(\pi - \frac{2\alpha}{3}\right) + 1\right)^2 = 1 + tg^2\left(\frac{2\alpha}{3}\right) - \left(1 - tg\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right)^2 = 1 + tg^2\left(\frac{2\alpha}{3}\right) - 1 + 2tg\left(\frac{2\alpha}{3}\right) - tg^2\left(\frac{2\alpha}{3}\right) = 2tg\left(\frac{2\alpha}{3}\right)$$

Ответ: $2tg\left(\frac{2\alpha}{3}\right)$.

Пример 5.

Упростить выражение: $\frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha}(tg^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

Решение:

Заменим $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и раскроем скобки.

$$\frac{ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha}(tg^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\alpha} \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha \right) = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 6.

Упростить выражение: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \frac{2}{tg\alpha + ctg\alpha} - 1$.

Решение:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - \frac{2}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} - 1 &= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \\ (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \frac{2}{tg\alpha + ctg\alpha} - 1 &= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \frac{2}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

Пример 7.

Упростить выражение: $\sqrt{\sin^2\alpha \cdot (1 + ctg\alpha) + \cos^2\alpha \cdot (1 + tg\alpha)}$.

Решение:

$$\sqrt{\sin^2\alpha \cdot (1 + ctg\alpha) + \cos^2\alpha \cdot (1 + tg\alpha)} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \sqrt{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha + \cos\alpha|$$

Ответ: $|\sin\alpha + \cos\alpha|$

2. Использование формул двойного аргумента и понижение степени.

Пример 1.

Найдите $7\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0,2$.

Решение:

Так как $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$,

то $\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot (-0,2)^2 = 1 - 2 \cdot 0,04 = 0,92$.

Тогда $7\cos 2\alpha = 7 \cdot 0,92 = 6,44$

Ответ: 6,44.

Пример 2.

Вычислить $\sin 112,5^\circ$.

Решение:

Применяя формулу $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ и так как $\sin 112,5^\circ > 0$, получим

$$\sin 112,5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 225^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi + 45^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$

Пример 3.

Вычислить: $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12}$.

Решение:

Используя формулу понижения степени $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, получим

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} - \frac{1 + \cos \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3.

Найдите $\frac{3 \sin 6\alpha}{5 \cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0,8$.

Решение:

α

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Так как $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, то $\frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} = \sin 2\alpha$.

$$\frac{3 \sin 6\alpha}{5 \cos 3\alpha} = \frac{3 \sin 2 \cdot 3\alpha}{5 \cos 3\alpha} = \frac{3 \cdot 2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha}{5 \cos 3\alpha} = \frac{6 \sin 3\alpha}{5}$$

Поскольку $\sin 3\alpha = 0,8$, то $\frac{6 \sin 3\alpha}{5} = \frac{6 \cdot 0,8}{5} = \frac{4,8}{5} = 0,96$

Ответ: 0,96.

Пример 4.

Упростить выражение: $\operatorname{ctg}(3\alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - 2 \sin^{-1}(6\alpha)$.

Решение:

$$\operatorname{ctg}(3\alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - 2\sin^{-1}(6\alpha) = \operatorname{ctg}(3\alpha) - \operatorname{tg}(3\alpha) - \frac{2}{\sin(6\alpha)} = \operatorname{ctg}(3\alpha) - \operatorname{tg}(3\alpha) - \frac{2}{2\sin(3\alpha) \cdot \cos(3\alpha)} =$$

Ответ: $-2\operatorname{tg}(3\alpha)$.

Пример 5.

Упростить выражение: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\alpha}}$, где $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\alpha}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\alpha)}} = \sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 2\alpha}} = \sqrt{2 + 2|\cos 2\alpha|}.$$

По условию $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому $0 \leq 2\alpha \leq \pi$, т. е. $\cos 2\alpha$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим два случая:

1) $0 \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\cos 2\alpha \geq 0 \vee \sqrt{2 + 2|\cos 2\alpha|} = \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha} = \sqrt{2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \alpha} = \sqrt{4\cos^2 \alpha} = 2 \cdot |\cos \alpha| = 2\cos \alpha.$$

2) $\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \pi$, откуда

$$\cos 2\alpha \leq 0 \vee \sqrt{2 + 2|\cos 2\alpha|} = \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos 2\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 2\sin^2 \alpha} = \sqrt{4\sin^2 \alpha} = 2 \cdot |\sin \alpha| = 2\sin \alpha. \text{ и}$$

Ответ: $2\cos \alpha$ при $0 \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$; $2\sin \alpha$ при $\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \pi$.

3. Использование формул сложения

Пример 1. Найти значение выражения:

$$\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ = \sin(20^\circ + 40^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Пример 2. Найти значение выражения:

$$\cos(\alpha + \beta), \text{ если } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Решение: } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ так как } \alpha \in I \text{ четверти,}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \text{ так как } \beta \in I \text{ четверти.}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 3.

Упростить выражение: $2 \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{5}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{6\alpha}{5}\right)$.

Решение:

Применяя формулы приведения и сложения, получим:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{6\alpha}{5}\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{5}\right) \\
 \sin \alpha \cdot \cos \alpha &= 2 \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{5}\right) - \sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{6\alpha}{5}\right) - \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{5}\right) = \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{5}\right) - \sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{6\alpha}{5}\right) = \alpha \\
 & \left(\frac{\alpha}{5}\right) - \alpha \\
 & \alpha \cdot \sin \alpha \\
 & \left(\alpha + \frac{\alpha}{5}\right) = 2 \cos \alpha \\
 & \left(\frac{\alpha}{5}\right) - \sin \alpha \\
 & \alpha \cdot \sin \alpha \\
 & \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{5}\right) - \sin\left(\frac{6\alpha}{5}\right) = 2 \cos \alpha \\
 2 \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{5}\right) &- \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{6\alpha}{5}\right) = 2 \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Ответ: $\alpha - \sin\left(\frac{4\alpha}{5}\right)$.

4. Введение вспомогательного аргумента

Пример.

Вычислить $\sqrt{2} \sin 15^\circ - \sqrt{6} \cos 15^\circ$

Решение:

Воспользуемся методом введения дополнительного угла, для этого умножим и разделим выражение на $2\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{2} \left(\frac{\sin 15^\circ}{2} - \frac{\sqrt{3} \cos 15^\circ}{2} \right) &= 2\sqrt{2} (\sin 15^\circ \cos 60^\circ - \cos 15^\circ \sin 60^\circ) = 2\sqrt{2} \sin (15^\circ - 60^\circ) = \alpha \\
 \alpha - 2\sqrt{2} \sin 45^\circ &= \frac{-2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -2
 \end{aligned}$$

Ответ: -2

5. Использование формул преобразования суммы и разности в произведение

Пример 1.

Упростить выражение:
$$\frac{\cos(18\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{\sin(13\alpha) - \sin(\pi + 3\alpha)}.$$

Решение:

Применяя формулы приведения, разности косинусов, суммы синусов и синуса двойного угла, получим:

$$\frac{\cos(18\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{\sin(13\alpha) - \sin(\pi + 3\alpha)} = \frac{\cos(18\alpha) - \cos 2\alpha}{\sin(13\alpha) + \sin(3\alpha)} = \frac{-2\sin(10\alpha) \cdot \sin(8\alpha)}{2\sin(8\alpha) \cdot \cos(5\alpha)} = \frac{-\sin(10\alpha)}{\cos(5\alpha)} = \frac{-2\sin(5\alpha) \cdot \cos(5\alpha)}{\cos(5\alpha)} = -2\sin(5\alpha).$$

Ответ: $-2\sin(5\alpha)$.

6. Использование формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (или разность)

Пример 1.

Вычислить:
$$\frac{\sin 48^\circ \cos 53^\circ + \sin 23^\circ \cos 18^\circ}{\sin 71^\circ}.$$

Решение:

$$\frac{\sin 48^\circ \cos 53^\circ + \sin 23^\circ \cos 18^\circ}{\sin 71^\circ} = \frac{\frac{\sin(48^\circ - 53^\circ) + \sin(48^\circ + 53^\circ)}{2} + \frac{\sin(23^\circ - 18^\circ) + \sin(23^\circ + 18^\circ)}{2}}{\sin 71^\circ} = \frac{-\sin 5^\circ + \sin 101^\circ - \sin 5^\circ + \sin 41^\circ}{2\sin 71^\circ} = \frac{\sin 101^\circ + \sin 41^\circ - 2\sin 5^\circ}{2\sin 71^\circ}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2.

Упростить выражение:
$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{5}\right) - \cos\left(\frac{3\alpha}{5}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}.$$

Решение:

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{5}\right) - \cos\left(\frac{3\alpha}{5}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\alpha}{15}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}{\sin\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}}{\sin\left(\frac{3\alpha}{5}\right) - \cos\left(\frac{3\alpha}{5}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}{\cos\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}} = \frac{\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\alpha}{15}\right) + \cos\left(\frac{2\alpha}{15}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}}{\frac{\sin\left(\frac{3\alpha}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha}{15}\right) - \cos\left(\frac{3\alpha}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}{\cos\left(\frac{2\alpha}{15}\right)}}$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\left(\frac{2\alpha}{15}\right)$.

7. Нахождение тригонометрических выражений с использованием дополнительных условий

Пример 1.

Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $3 \sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha = 8$.

Решение:

Из основного тригонометрического тождества следует: $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Откуда $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$

Произведем преобразования в равенстве из условия: $3 \sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha = 8$

$$3(1 - \cos^2 \alpha) + 9 \cos^2 \alpha = 8$$

$$3 - 3 \cos^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha = 8$$

$$3 + 6 \cos^2 \alpha = 8$$

$$6 \cos^2 \alpha = 5$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{5}{6}$$

Тогда $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{5}{6}} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = 0,2$

Ответ: 0,2.

Пример 2.

Найдите $\frac{7 \cos \alpha - 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Решение:

$$3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha (\frac{7 - 6 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg} \alpha + 2})$$

$$\frac{7 \cos \alpha - 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha (7 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - 6 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha})}{3 \operatorname{tg} \alpha + 2}$$

При условии $\operatorname{tg} \alpha = 3$ имеем: $\frac{7-6\operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha+2} = \frac{7-6 \cdot 3}{3 \cdot 3+2} = \frac{-11}{11} = -1$

Ответ: -1.

Пример 3.

Найдите значение выражения: $\sqrt{4-4\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}-9$, если $7\cos\alpha-2\sin\alpha=0$.

Решение:

$$\sqrt{4-4\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}-9=\sqrt{(2-\operatorname{tg}\alpha)^2}-9=|2-\operatorname{tg}\alpha|-9.$$

Из условия $7\cos\alpha-2\sin\alpha=0$ находим $\operatorname{tg}\alpha=3,5$ и $|2-\operatorname{tg}\alpha|-9=-7,5$.

Ответ: -7,5

8. Нахождение свойств тригонометрических функций

Пример.

Найти множество значений функции: $y = \frac{\sin x \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Решение:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Следовательно $E(\sin x + \cos x) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, $E(\sin x \cos x + 3\sqrt{2}) = [2\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$,

$E(y) = [2; 4]$.

Ответ: $[2; 4]$

9. Тест «Преобразование тригонометрических выражений»

Вариант 1

A1. Найдите значение выражения: $\operatorname{tg} 210^\circ$

- 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) 1 4) -1

A2. Вычислите: $\frac{2\sqrt{5}g^0}{1+\sqrt{5}g^0}$

- 1) $\sqrt{3}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) 0,5 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

A3. Вычислите: $\cos 58^\circ \cos 32^\circ \sin 58^\circ \sin 32^\circ$

- 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) 0,5 3) $0,5\sqrt{2}$ 4) 0

$$\frac{\operatorname{tg} \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \frac{\pi}{4} + x}$$

A4. Упростите выражение:

- 1) $\frac{1}{\cos \alpha}$ 2) $\frac{1}{\sin \alpha}$ 3) $\sin \alpha$ 4) 1

- A5. Упростите выражение: $\frac{\sin 2\alpha \pi}{\sin 2\alpha} - \sin \alpha$.
- 1) $3\cos \alpha$ 2) $\cos \alpha$ 3) 0 ; 4) $2\cos \alpha$.

- A6. Вычислите: $\frac{\sin 30^\circ \cos 30^\circ}{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$
- 1) 0 2) -1 3) 2 4) 1
- $\frac{2(\cos 60^\circ \sin 60^\circ)}{\cos 120^\circ \sin 150^\circ}$

- A7. Найдите значение выражения:
- 1) 1 2) 2 3) 0 4) -1

- A8. Упростите выражение: $\frac{1 \sin 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$.
- 1) $\cos \alpha$ 2) $\sin \alpha$ 3) $\sin \alpha$; 4) $\sin \alpha$

- A9. Найдите значение выражения: $\frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} \cdot 0,5 \operatorname{ctg} \alpha =$
- 1) $-\frac{1}{7}$ 2) 7 3) -7 4) $\frac{1}{7}$

- A10. Найдите значение выражения: $\frac{\alpha \sin \alpha}{217}$ $\alpha \leftarrow \frac{8}{\alpha}$
- 1) $0,25$ 2) 4 или $0,25$ 3) $-0,25$ 4) 4

Вариант 2

- A1. Упростите выражение $7\cos^2 \alpha - 5 + 7\sin^2 \alpha$.
- 1) $1 + \cos^2 \alpha$; 2) 2 ; 3) -12 ; 4) 12 .

- A2. Найдите значения выражения $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.
- 1) 1 ; 2) -1 ; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{3}{5}$.

- A3. Упростите выражение $6,8 + 2\cos^2 x$, если $\sin x = \frac{1}{2}$.
- 1) $8,3$; 2) $7,8$; 3) $6,8$; 4) $9,3$.

- A4. Вычислите: $\frac{6\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}$

1) $3\sqrt{3}$; 2) 3; 3) $1,5\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}$.

A5. Упростите выражение $6\cos^2\alpha - 5 - 3\cos 2\alpha$.

1) 1; 2) 2; 3) -2; 4) -5.

$$3\cos^2\alpha + \frac{3}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} - 22,4.$$

A6. Упростите выражение

1) -20,6; 2) -16,4; 3) -19,4; 4) $6\cos^2\alpha - 22,4$.

A7. Упростите выражение $7,4 - \operatorname{tg}^2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

1) 17,4; 2) 4,4; 3) -0,6; 4) -2,6.

A8. Упростите выражение $\frac{2}{1 - \sin^2 x}$, если $\operatorname{tg} x = 4$.

1) 5; 2) 10; 3) 17; 4) 34.

A9. Найдите значение выражения

$$\sin\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{при } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

1) $\sqrt{3}$; 2) $1 + \sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$.

A10. Упростите выражение: $2\operatorname{tg}\alpha \cdot 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1}$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) $2\operatorname{tg}^2\alpha$.

10. Ответы к тесту «Преобразование тригонометрических выражений»

Ответы:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
1	1	4	4	1	2	2	2	2	4	4
2	2	4	1	4	3	3	3	4	2	2

11. Практикум «Преобразование тригонометрических выражений»

Пример 1. Найдите значение выражения:

1) $16\sqrt{2}\cos 585^\circ$

2) $\frac{-44}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ}$

3) $\frac{258\sin 179^\circ \cdot \cos 179^\circ}{\sin 358^\circ}$

4) $\frac{74^\circ - \cos^2 74^\circ}{\sin^2 74^\circ}$

5) $\frac{18\cos 41^\circ}{\sin 49^\circ}$

6) $42\sqrt{6}\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{6}$

7) $-44\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,5$.

8) $\frac{6\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 80^\circ}$

Пример 2. Найти значение выражения:

1) $\sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \sin 15^\circ$

2) $\cos 12^\circ \cos 18^\circ - \sin 12^\circ \sin 18^\circ$

3) $\cos 98^\circ \cos 8^\circ + \sin 98^\circ \sin 8^\circ$

4) $\frac{\operatorname{tg} 22^\circ + \operatorname{tg} 23^\circ}{1 - \operatorname{tg} 22^\circ \operatorname{tg} 23^\circ}$; 5) $\frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ}{1 + \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 45^\circ}$; 6) $\sin 75^\circ$; 7) $\cos 105^\circ$; 8) $\cos 15^\circ$

9) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2\cos \alpha \sin \beta}{2\sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta)}$, $\alpha - \beta = 150^\circ$

Пример 3. Найти значение выражения:

1) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$

2) $\frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2}\sin 25^\circ}$

3) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$

4) $\frac{3 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{6\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$

5) $\sqrt{9 - 6\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 7$, если $2\sin \alpha - 3\cos \alpha = 0$.

Пример 4. Упростить выражения:

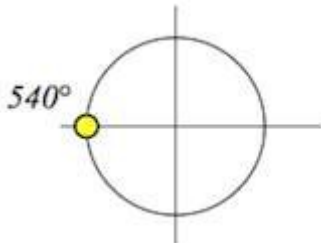
- $$1) \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \cos(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$
- $$2) \frac{1}{\sin^2(8\alpha)} - (\operatorname{ctg}(2\pi-8\alpha)-1)^2$$
- $$3) \frac{\sin(3\alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$
- $$4) \left(\frac{\sin(16\alpha) - \sin(6\alpha)}{\cos(\pi - 11\alpha)} \right)^2 - \left(\frac{\cos(7\alpha) + \cos(3\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)} \right)^2$$

Решение заданий практикума

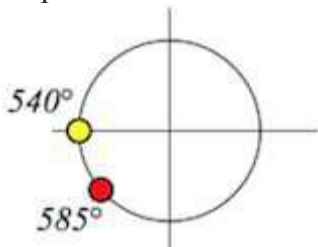
Пример 1

Решение:

- 1) Воспользуемся формулами приведения, для чего прежде представим иначе 585° :
 $585^\circ = 540^\circ + 45^\circ$. Тогда $16\sqrt{2} \cos 585^\circ = 16\sqrt{2} \cos(540^\circ + 45^\circ)$
 540° на круге располагаются здесь:



Название функции не меняем, знак ставим «-», так как косинус угла III четверти отрицателен:



$$16\sqrt{2} \cos(540^\circ + 45^\circ) = -16\sqrt{2} \cos(45^\circ) = -16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -16$$

Ответ: -16.

- 2) Применяем формулы приведения ко второму слагаемому знаменателя:

$$\cos 113^\circ = \cos(90^\circ + 23^\circ) = -\sin 23^\circ$$

$$\cos^2 113^\circ = (-\sin 23^\circ)^2 = \sin^2 23^\circ$$

Поэтому, $\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ = \cos^2 23^\circ + \sin^2 23^\circ = 1$

замечая в знаменателе основное тригонометрическое тождество.

$$\text{Тогда } \frac{-44}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ} = \frac{-44}{1} = -44.$$

Ответ: -44.

3) К числителю применяем формулу двойного угла для синуса:

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\text{Получаем: } \frac{129 \cdot 2 \sin 179^\circ \cdot \cos 179^\circ}{\sin 358^\circ} = \frac{129 \sin 358^\circ}{\sin 358^\circ} = 129$$

Ответ: 129.

4) К числителю применяем формулу двойного угла для косинуса:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$74^\circ - \cos^2 74^\circ$$

$$\sin^2 74^\circ$$

$$\text{Получаем: } 74^\circ - \sin^2 74^\circ$$

Ответ: -7.

5) Применяем к знаменателю (можно и к числителю) формулы приведения:

$$\frac{18 \cos 41^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{18 \cos 41^\circ}{\sin (90^\circ - 41^\circ)} = \frac{18 \cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} = 18$$

Ответ: 18.

6) Пользуясь формулами приведения, $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Тогда } 42\sqrt{6} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{6} = 42\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -63$$

Ответ: -63.

7) Воспользуемся формулой двойного угла для косинуса:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot (-0,5)^2 - 1 = 2 \cdot 0,25 - 1 = 0,5 - 1 = -0,5$$

$$\text{Тогда } -44 \cos 2\alpha = -44 \cdot (-0,5) = 22$$

Ответ: 22.

8)

$$\frac{6 \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{6 \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos (90^\circ - 10^\circ)} = \frac{6 \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ} = \frac{6 \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} (2 \cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ)} = \frac{2 \cdot 6 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 12$$

Ответ: 12.

Пример 2

Решение:

$$1) \sin 45^\circ \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 15^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2) \cos 12^\circ \cos 18^\circ - \sin 12^\circ \sin 18^\circ = \cos (12^\circ + 18^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \cos 98^\circ \cos 8^\circ + \sin 98^\circ \sin 8^\circ = \cos (98^\circ - 8^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$4) \frac{\operatorname{tg} 22^{\circ} + \operatorname{tg} 23^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 22^{\circ} \operatorname{tg} 23^{\circ}} = \operatorname{tg}(22^{\circ} + 23^{\circ}) = \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$

$$5) \frac{\operatorname{tg} 45^{\circ} - \operatorname{tg} 15^{\circ}}{1 + \operatorname{tg} 15^{\circ} \operatorname{tg} 45^{\circ}} = \operatorname{tg}(45^{\circ} - 15^{\circ}) = \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$6) \sin 75^{\circ} = \sin(45^{\circ} + 30^{\circ}) = \sin 45^{\circ} \cos 30^{\circ} + \cos 45^{\circ} \sin 30^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$7) \cos 105^{\circ} = \cos(60^{\circ} + 45^{\circ}) = \cos 60^{\circ} \cos 45^{\circ} - \sin 60^{\circ} \sin 45^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$8) \cos 15^{\circ} = \cos(45^{\circ} - 30^{\circ}) = \cos 45^{\circ} \cos 30^{\circ} + \sin 45^{\circ} \sin 30^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$9) \frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta)} =$$

$$\alpha - \beta \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} 150^{\circ} = \operatorname{tg}(180^{\circ} - 30^{\circ}) = -\operatorname{tg} 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\cos 0^{\circ}$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos 0^{\circ}}$$

Пример 3.

Решение:

$$1) \operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^{\circ} = \frac{\sin 20^{\circ} \cdot \sin 40^{\circ} \cdot \sin 80^{\circ}}{\cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ}} =$$

$$\frac{\sin 20^{\circ} \cdot 2 \sin 20^{\circ} \cdot \cos 20^{\circ} \cdot 2 \sin 40^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ}}{\cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ}} = \frac{4 \sin 20^{\circ} \cdot \frac{1}{2} (\cos 20^{\circ} - \cos 60^{\circ})}{\cos 80^{\circ}} =$$

$$\frac{2 \sin 20^{\circ} \cdot (\cos 20^{\circ} - \cos 60^{\circ})}{\cos 80^{\circ}} = \frac{\sin 40^{\circ} - 2 \sin 20^{\circ} \cdot \frac{1}{2}}{\cos 80^{\circ}} = \frac{\sin 40^{\circ} - \sin 20^{\circ}}{\cos 80^{\circ}} =$$

$$\frac{2 \sin 10^{\circ} \cdot \cos 30^{\circ}}{\cos 80^{\circ}} = \frac{2 \sin(90^{\circ} - 80^{\circ}) \cdot \cos 30^{\circ}}{\cos 80^{\circ}} = \frac{2 \cos 80^{\circ} \cdot \cos 30^{\circ}}{\cos 80^{\circ}} = 2 \cos 30^{\circ} =$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\cos(90^{\circ} - 70^{\circ}) - \sin 20^{\circ}$$

$$2) \frac{3(\cos 20^{\circ} - \sin 20^{\circ})}{\sqrt{2} \sin 25^{\circ}} =$$

$$3) \sin 47^{\circ} + \sin 61^{\circ} - \sin 11^{\circ} - \sin 25^{\circ} = (\sin 47^{\circ} + \sin 61^{\circ}) - (\sin 11^{\circ} + \sin 25^{\circ}) = 2 \sin 54^{\circ} \cos 7^{\circ} - 2 \sin 18^{\circ} \cos 7^{\circ} = 2 \cos 7^{\circ} (\sin 54^{\circ} - \sin 18^{\circ}) = 2 \cos 7^{\circ} \cdot 2 \sin 18^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} =$$

$$= \frac{2 \cos 7^\circ \cdot 2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{2 \cos 7^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 7^\circ \cdot 2 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} =$$

$$\frac{\cos 7^\circ \cdot \sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 7^\circ \cdot \sin(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 7^\circ \cdot \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ$$

- 4) В данном выражении представим число 3 в виде $3\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$ и затем разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 \alpha$

$$\frac{3 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{6 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{6 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 - \operatorname{tg} \alpha}{6 - \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$\frac{3 \cdot (-2)^2 + 3 - (-2)}{6 - (-2)^2} = 8,5$$

5) $\sqrt{9 - 6 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 7 = \sqrt{(3 - \operatorname{tg} \alpha)^2} - 7 = |3 - \operatorname{tg} \alpha| - 7.$

Из условия $2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha = 0$ находим $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$ и $|3 - \operatorname{tg} \alpha| - 7 = -5,5$

Пример 4.

Решение:

1)
$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{-\operatorname{ctg} \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{-\operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha} = -1$$

2)

$$\frac{1}{\sin^2(8\alpha)} - (\operatorname{ctg}(2\pi - 8\alpha) - 1)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha - (-\operatorname{ctg} 8\alpha - 1)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha - (\operatorname{ctg} 8\alpha + 1)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 8\alpha - 2 \operatorname{ctg} 8\alpha - 1 =$$

3)
$$\frac{\sin(3\alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin(3\alpha) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos(3\alpha) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{3\alpha + \frac{\alpha}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - \frac{\alpha}{2}}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{3\alpha + \frac{\alpha}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - \frac{\alpha}{2}}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{7\alpha}{4}\right).$$

4)

$$\left(\frac{\sin(16\alpha) - \sin(6\alpha)}{\cos(\pi - 11\alpha)}\right)^2 - \left(\frac{\cos(7\alpha) + \cos(3\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}\right)^2 = \left(\frac{2 \sin(5\alpha) \cdot \cos(11\alpha)}{-\cos(11\alpha)}\right)^2 - \left(\frac{2 \cos(5\alpha) \cdot \cos(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)}\right)^2 = (-2 \sin(5\alpha))^2 - (-2 \cos(5\alpha))^2 =$$

Ответ: $-4 \cos(10\alpha)$.

12. Тренажер «Преобразование тригонометрических выражений»

1 часть

- 1) Найти $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$
- 2) Вычислите $\sin 2x, \cos 2x, \operatorname{tg} 2x, \operatorname{ctg} 2x$, если $\cos x = \frac{5}{13}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$
- 3) Вычислите $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = 0,8$. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- 4) Найти значение выражения $2 \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ$
- 5) Найти значение выражения $\frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$
- 6) Найти значение выражения $\frac{-22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$
- 7) Найти $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$
- 8) Найти значение выражения $\frac{4 \sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$
- 9) Найти значение выражения $\frac{\cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta}{2 \cos \alpha \sin \beta + \sin(\alpha - \beta)}$, если $\alpha + \beta = 120^\circ$
- 10) Вычислить $\frac{2 \cos^2 48^\circ - 1}{\sin 186^\circ - \sin 6^\circ}$
- 11) Найти значение выражения $27 \sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$
- 12) Вычислить $\frac{\sin \beta + \cos \beta}{(\sin \beta + \cos \beta)^{-1}}$, если $\sin 2\beta = -0,6; \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{4\pi}{4}$
- 13) Вычислить $\frac{8 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ}{\cos 50^\circ}$
- 14) Вычислить $\frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$
- 15) Вычислить $\frac{\sin 77^\circ \cos 65^\circ - \cos 5^\circ \sin 17^\circ}{\sin 8^\circ}$
- 16) Найти значение выражения $\sqrt{16 - 8 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 6$, если $11 \cos \alpha - 2 \sin \alpha = 0$.
- 17) Найти множество значений функции: $y = \sqrt{0,125}(\cos x - \sin x)$.

2 часть

- 1) Упростите выражение $\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(\pi + 2\alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.
- 2) Упростить выражение: $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$
- 3) Упростить выражение: $\frac{1}{2} \cos\left(\pi + \frac{5\alpha}{6}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$.

- 4) Упростить выражение:
$$\frac{\sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) - \cos(2\pi - 2\alpha)} .$$
- 5) Упростить выражение:
$$\operatorname{tg}(4\alpha) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + 4\alpha\right) + 2 \operatorname{ctg}(8\alpha) .$$
- 6) Упростить выражение:
$$\frac{\cos\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{7\alpha}{15}\right)}{\sin\left(\frac{2\alpha}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\alpha}{5}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{7\alpha}{15}\right)} .$$
- 7) Упростить выражение:
$$\left(\frac{\sin(13\alpha) + \sin(7\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 10\alpha\right)}\right)^2 - \left(\frac{\cos(5\alpha) - \cos(\alpha)}{\sin(\pi + 2\alpha)}\right)^2 .$$
- 8) Упростить выражение:
$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{2\alpha}{3}\right) - 4 \left(\frac{1 - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 1} \right)^2$$

Ответы к самостоятельной работе

1 часть

- 1) $-0,75$; 2) $120/169, -119/169, -120/119, -119/120$; 3) $\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{3}$; 4) -2 ; 5) -5 ;
 6) -22 ; 7) -8 ; 8) 2 ; 9) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 10) $0,5$; 11) 12 ; 12) $0,8$; 13) 2 ; 14) $-2,25$; 15)
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 16) $-4,5$; 17) $[-\sqrt{0,5}; \sqrt{0,5}]$

2 часть

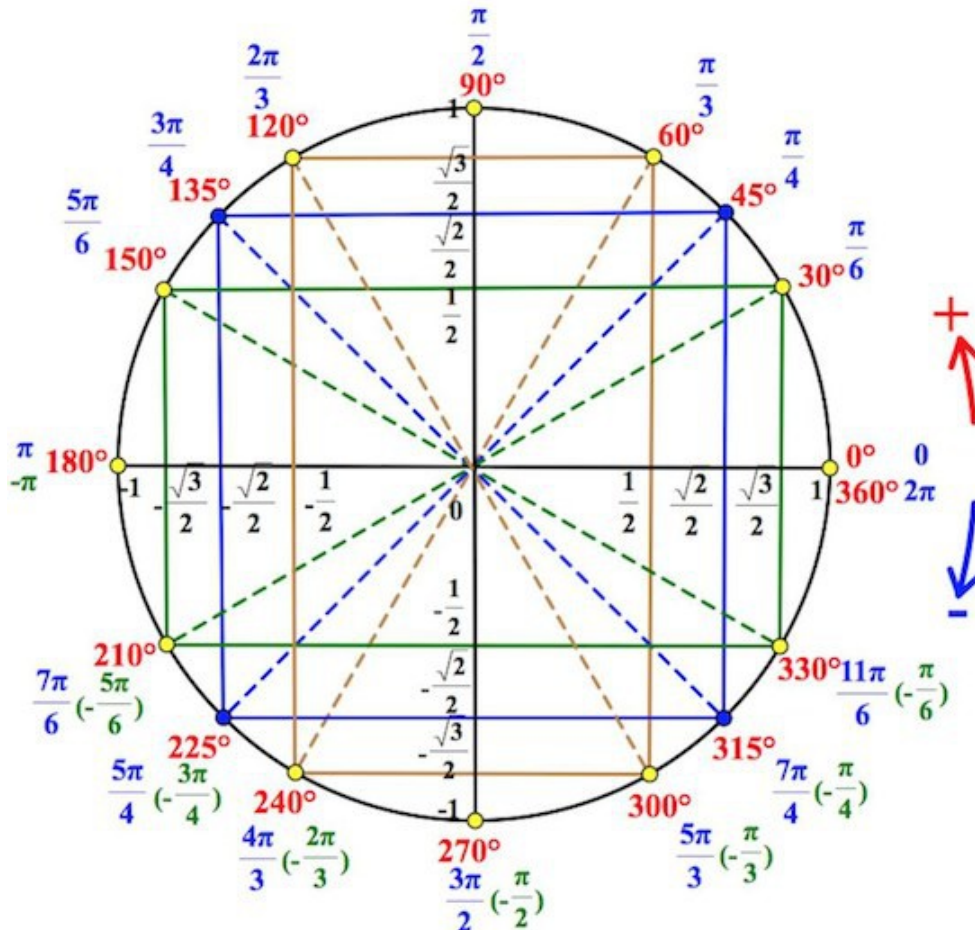
- 1) 1 ; 2) -1 ; 3) $\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)$; 4) $-\operatorname{ctg}\left(\frac{9\alpha}{4}\right)$; 5) $2 \operatorname{ctg}(4\alpha)$; 6) $-\operatorname{tg}\left(\frac{7\alpha}{15}\right)$; 7)
 $4 \cos(6\alpha)$; 8) -1

13. Справочный материал

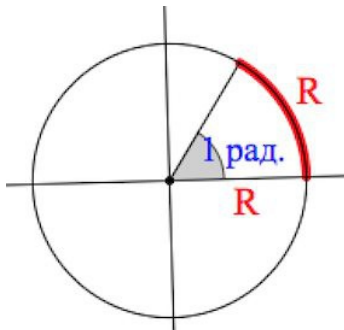
13.1 Перевод радиан в градусы и градусы в радианы

Перевод радиан в градусы и градусы в радианы

На тригонометрическом круге помимо углов в градусы мы наблюдаем радианы.

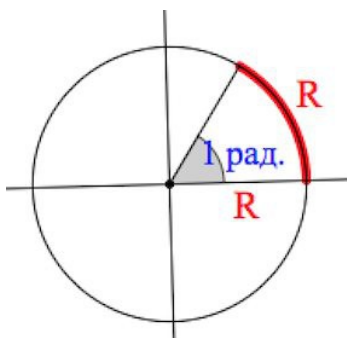


Радиян определяется как угловая величина дуги, длина которой равна её радиусу. Соответственно, так как длина окружности равна $2\pi R$, то очевидно, что в окружности укладывается 2π радиан, то есть $360^\circ = 2\pi$ радиан.



$1 \text{ рад} \approx 57,295779513^\circ \approx 57^\circ 17' 44,806'' \approx 206265''$.

Все знают, что π радиан – это 180° .



Так вот, например, $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, а $\frac{11\pi}{6} = \frac{11 \cdot 180^\circ}{6} = 330^\circ$. Так, мы **научились переводить радианы в углы**.

Теперь наоборот, **давайте переводить градусы в радианы**.

Допустим, нам надо перевести 80° в радианы. Нам поможет [пропорция](#). Поступаем следующим образом:

Так как, $180^\circ = \pi$ радиан, то заполним таблицу:

	градусы	радианы
1.	180	π
2.	80	?

$$\text{Откуда } 80^\circ = \frac{80 \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{4\pi}{9}$$

Тренируемся находить значения синуса и косинуса по кругу

Давайте еще уточним следующее.

Ну хорошо, если нас просят вычислить, скажем, $\sin 30^\circ$, — здесь обычно путаницы не возникает — все начинают первым делом искать 30° на круге.

1) Давайте договоримся раз и навсегда! То, что стоит после \sin или \cos — это аргумент=угол, а углы у нас располагаются на круге, не ищите их на осях! (Просто отдельные точки попадают и на круг, и на ось...) А сами значения синусов и косинусов — ищем на осях!

2) И еще! Если мы от точки «старт» отправляемся **против часовой стрелки** (основное направление обхода тригонометрического круга), **то мы откладываем положительные значения углов**, значения углов растут при движении в этом направлении.

Если же мы от точки «старт» отправляемся **по часовой стрелке**, **то мы откладываем отрицательные значения углов**.

13.2 Тригонометрический круг у вас в руках

Тригонометрический круг — у вас в руках

Вы же уже поняли, что главное — запомнить значения тригонометрических функций первой четверти. В остальных четвертях все аналогично, нужно лишь следить за знаками. А «цепочку-лестенку» значений тригонометрических функций, вы, надеюсь уже не забудете.

