

Министерство здравоохранения и социального развития РФ  
ОГАПОУ «Старооскольский медицинский колледж»

Есаулкова О.В.



# Рабочая тетрадь

по математике

Геометрия

для студентов медицинского колледжа

---

г.Старый Оскол  
2018 г.

## **РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО МАТЕМАТИКЕ, ГЕОМЕТРИЯ, ЧАСТЬ 1**

Печатается по решению научно-методического совета Старооскольского медицинского колледжа. Протокол №6 от 17 июня 2018 г.

**Специальности:** 34.02.01 Сестринское дело

**Автор:**

**Есаулкова Ольга Васильевна** – преподаватель математики и информатики  
ОГАПОУ «Старооскольский медицинский колледж»

**Рецензент:**

**Лихачева Галина Александровна** – учитель математики МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 5»

Рабочая тетрадь составлена для самоподготовки и работы на семинарско-практических занятиях с целью систематизации учебного материала по предмету и в соответствии рабочей программе.

Издание второе, переработанное и дополненное.

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данная «Рабочая тетрадь» по математике, раздел «Геометрия» направлена на формирование у студентов базовых понятий и совокупности умений оперировать ими. Предлагаемые в ней задания соответствуют требованиям стандарта математического образования и дают возможность организовать разнообразную работу студентов на занятиях и дома.

Тетрадь содержит различные группы заданий, направленные на решение конкретных целей. Среди них можно выделить следующие:

1. группу заданий, проверяющих знание формулировок и понимание смысла определений, теорем, свойств, признаков.
2. группу заданий, формирующих у студентов умения подвести условие задания под некое геометрическое понятие или факт, найти на рисунке указанные фигуры и с помощью символов записать существующими между ними отношения. Такие задания способствуют развитию пространственного воображения студентов.
3. группу заданий, в которых предусмотрен анализ решения выборочных задач, заполнение пропусков в частично решенных задачах, а также задания для самостоятельного решения.

Кроме того, есть задания с выбором ответа и с данным ответом. Они позволяют студентам осуществить самоконтроль за качеством своего обучения. Задачи с использованием готовых чертежей значительно увеличивают объем рассматриваемого материала на занятии, повышает его эффективность.

Использование «Рабочей тетради по геометрии» с одной стороны позволяет повторить и систематизировать базисные знания по геометрии, для чего в структуру тетради включены справочные материалы. С другой стороны, рабочая тетрадь снабжена примерами расчетного характера, задачами на доказательство с использованием изученных аксиом, теорем и следствий из них.

В конце каждой темы студентам предлагается ответить на блок контрольных вопросов и тестов с целью более прочного усвоения теоретических знаний, закрепления умений и подготовки к осмысленному применению их в будущей практической деятельности.

*«Учиться можно только весело... Чтобы переваривать знания,  
надо поглощать их с аппетитом»*

**Франс А.**

***Приятного Вам аппетита!***

## **Тема «АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ»**

### **Студент должен знать:**

- формулировки аксиом стереометрии и следствия из них
- основные фигуры в пространстве
- способы задания плоскости, исходя из аксиом стереометрии и следствий из них
- что изучает стереометрия

### **Студент должен уметь:**

- формулировать аксиомы стереометрии и следствия из них
- называть основные фигуры в пространстве
- доказывать следствия из аксиом
- применять аксиомы и следствия при решении задач
- указывать способы задания плоскости, исходя из аксиом стереометрии и следствий из них

### **Семинарско-практическое занятие № 1** **«Аксиомы стереометрии и следствия из них»**

*«То, что может превысить геометрию, превышает нас»*  
**Б.Паскаль**

План.

1. Аксиомы стереометрии.
2. Следствия из аксиом.
3. Решение задач по теме «Аксиомы стереометрии и следствия из них».
4. Домашнее задание.

#### **1. Аксиомы стереометрии.**

A<sub>1</sub>: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

A<sub>2</sub>: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

A<sub>3</sub>: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## 2. Следствия из аксиом.

Теорема 1.

---



---

Доказательство.

1. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Теорема доказана.**

Теорема 2.

---



---

## 3. Решение задач по теме «Аксиомы стереометрии и следствия из них»

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение:

1. Для любой прямой существуют точки, принадлежащие ей, и \_\_\_\_\_

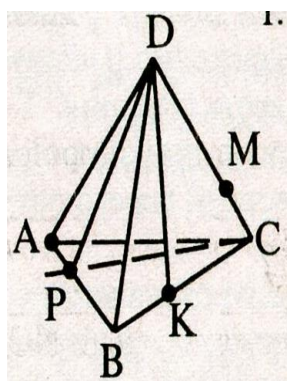
2. Через прямую и не лежащую на ней точку приходит плоскость, и притом \_\_\_\_\_

3. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом \_\_\_\_\_

4. Если  $A \in a$ ,  $a \subset \alpha$ , то  $A \dots \alpha$ .

5. Если  $A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ ,  $C \in AB$ , то  $C \dots \alpha$ .

2. По рисунку ответьте на вопросы.



1. Каким плоскостям принадлежит точка:

A? \_\_\_\_\_ M? \_\_\_\_\_

K? \_\_\_\_\_ D? \_\_\_\_\_

P? \_\_\_\_\_

2. Вне каких плоскостей лежит точка

A? \_\_\_\_\_ M? \_\_\_\_\_

K? \_\_\_\_\_ D? \_\_\_\_\_

P? \_\_\_\_\_

3. На каких плоскостях лежат прямые

DB? \_\_\_\_\_

DK? \_\_\_\_\_

AB? \_\_\_\_\_

PC? \_\_\_\_\_

AC? \_\_\_\_\_

4. В какой точке пересекаются прямая и плоскость

AD и ABC? \_\_\_\_\_

BD и ADC? \_\_\_\_\_

DK и ABC? \_\_\_\_\_

PC и ADB? \_\_\_\_\_

AB и PDC? \_\_\_\_\_

5. По какой прямой пересекаются плоскости  
 ABD и BDC? \_\_\_\_\_  
 ABC и ADC? \_\_\_\_\_  
 ABC и ABD? \_\_\_\_\_  
 ABD и ADC? \_\_\_\_\_  
 PDC и ABC? \_\_\_\_\_
6. Какие прямые лежат в плоскостях  
 ABC? \_\_\_\_\_  
 ABD? \_\_\_\_\_  
 BDC? \_\_\_\_\_
7. Перечислите несколько способов задания плоскости \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

4. Домашнее задание. п.1,2, 3; № 5, 9, 12.

### Справочные материалы

1. Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.
2. Основными фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости.
3. **A<sub>1</sub>:** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
4. **A<sub>2</sub>:** Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
5. **A<sub>3</sub>:** Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.
6. **Следствия:**
  1. **Теорема.** Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
  2. **Теорема.** Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

### Выберите ответ из числа предложенных

1. Отметьте точку А, не принадлежащую плоскости  $\alpha$ , и точку В, принадлежащую плоскости  $\alpha$ . Как расположена прямая АВ по отношению к плоскости  $\alpha$ ?  
 а) пересекает  $\alpha$ ; б) принадлежит  $\alpha$ .
2. Отметьте точки А и В, принадлежащие плоскости. Проведите прямую АВ. Как расположена прямая АВ по отношению к плоскости  $\alpha$ ?  
 а) пересекает  $\alpha$ ; б) принадлежит  $\alpha$ .
3. Могут ли прямая и плоскость иметь только одну общую точку?  
 а) да; б) нет.
4. Могут ли прямая и плоскость иметь только две общие точки?  
 а) да; б) нет. Ответ обоснуйте \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

## Контрольные вопросы

1. Что изучает стереометрия?
2. Назовите основные фигуры в пространстве.
3. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
4. Сформулируйте следствия из аксиом стереометрии.
5. Назовите способы задания плоскости, исходя из аксиом стереометрии и следствий из них.

## Тема «ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ»

### Студент должен знать:

- случаи взаимного расположения прямых в пространстве
- определение параллельных прямых
- определение скрещивающихся прямых
- формулировки теорем:
  - ~ параллельных прямых
  - ~ о двух прямых, параллельных третьей
  - ~ о скрещивающихся прямых
  - ~ признак скрещивающихся прямых
- формулировку леммы о пересечении плоскости параллельными прямыми

### Студент должен уметь:

- изображать на чертеже случаи взаимного расположения прямых в пространстве
- давать определение параллельных прямых
- давать определение скрещивающихся прямых
- формулировать теоремы:
  - ~ о параллельных прямых
  - ~ о двух прямых, параллельных третьей
  - ~ о скрещивающихся прямых
  - ~ признак скрещивающихся прямых
- формулировать лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми
- применять определения и теоремы при решении задач

## Семинарско-практическое занятие № 2 «Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве»

*«Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед!»*

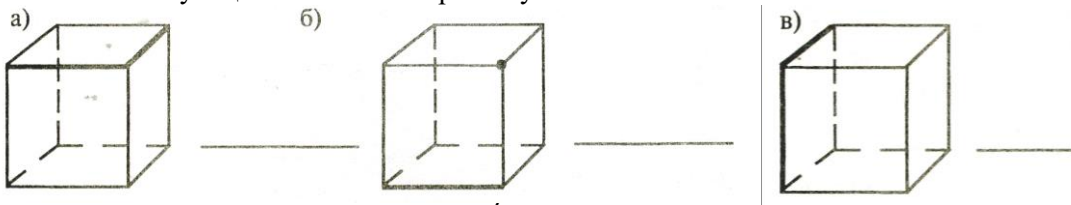
*Нивен А.*

План.

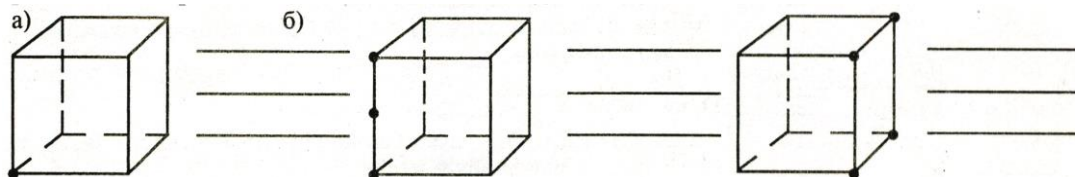
1. Систематизация знаний по теме «Аксиомы стереометрии и следствия из них»
2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве.
3. Решение задач «Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве»
4. Домашнее задание.

### **1. Систематизация знаний по теме «Аксиомы стереометрии и следствия из них»**

1. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы куба? Заштрихуйте соответствующие плоскостям грани куба.



2. Сколько граней проходит через, а) одну, б) две, в) три, г) четыре точки, выделенные на рисунке куба? Сколько плоскостей можно провести через те же точки? Определится ли в этом положение плоскости однозначно?



## 2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве.

1. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если \_\_\_\_\_

2. Признак параллельности прямых в пространстве: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Сделайте рисунок

Доказательство.

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_

Теорема доказана.

3. Две прямые в пространстве называются **скрещивающимися**, если \_\_\_\_\_

4. Признак скрещивающихся прямых: \_\_\_\_\_

---

---

---

Сделайте рисунок

## 3. Решение задач «Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве»

1. Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение.

1. Две прямые в пространстве могут:

а) иметь \_\_\_\_\_ точку;

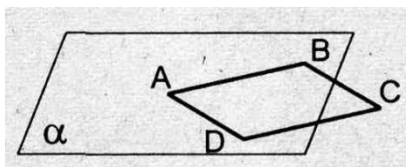
б) не иметь \_\_\_\_\_ точек.

2. Если прямые а и б имеют две общие точки, то они \_\_\_\_\_

3. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и \_\_\_\_\_

4. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая \_\_\_\_\_
5. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом \_\_\_\_\_
6. Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы \_\_\_\_\_

2. Решите задачу:



**Дано:** ABCD – параллелограмм.

Точки A, B и D лежат в плоскости  $\alpha$ .

**Доказать:** точка C лежит в плоскости  $\alpha$ .

**Доказательство.**

---

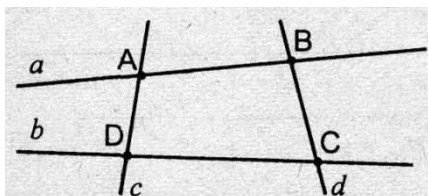


---



---

3. Решите задачу:



**Дано:** прямые, a и b – скрещивающиеся.

**Доказать:** прямые c и d – скрещивающиеся.

**Доказательство.**

---



---



---

4. Домашнее задание. п. 4, 5, 7; № 17, 20.

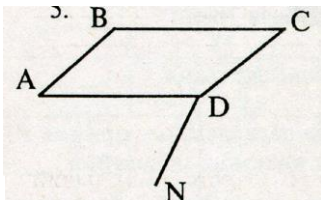
### Справочные материалы

1. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости не пересекаются.
2. **Теорема о параллельных прямых:**  
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.
3. **Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.**  
Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.
4. **Теорема о двух прямых, параллельных третьей:**  
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
5. Две прямые в пространстве называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.
6. **Признак скрещивающихся прямых:**  
Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.
7. **Теорема о скрещивающихся прямых:**  
Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.
8. Возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:
  - а) прямые пересекаются
  - б) прямые параллельны
  - в) прямые скрещивающиеся

### Выберите ответ из числа предложенных

1. Прямые c и d принадлежат плоскости  $\beta$ . Могут ли прямые c и d быть параллельными?

- а) да; б) нет.
2. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Прямая  $c$  пересекает прямую  $a$ , но не пересекает  $b$ . Как расположены прямые  $c$  и  $b$ ?  
а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются.
3. Прямые  $a$  и  $b$  принадлежат одной плоскости. Могут ли эти прямые пересекаться?  
а) да; б) нет.
4. Известно, что две прямые  $c$  и  $d$  параллельны прямой  $k$ . Как взаимно расположены прямые  $c$  и  $d$ ?  
а) пересекаются; б) скрещиваются; в) параллельны.
- 5.



ABCD - параллелограмм. Угол между прямыми AD и DN равен  $70^\circ$ .  
Какой угол между скрещивающимися прямыми BC и DN?  
а)  $110^\circ$ ; б)  $70^\circ$ ; в)  $130^\circ$ .  
Чему равен угол между прямыми AB и DK?  
а)  $150^\circ$ ; б)  $110^\circ$ ; в)  $70^\circ$ .

6. Нет такой плоскости, что прямые  $a$  и  $b$  лежат в ней. Какие это прямые?  
а) параллельные; б) пересекающиеся; в) скрещивающиеся

### Контрольные вопросы

1. Какие две прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие две прямые в пространстве называются скрещивающимися?
3. Какие случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве вы знаете?
4. Сформулируйте теорему о параллельных прямых.
5. Сформулируйте теорему о двух прямых, параллельных третьей прямой.
6. Сформулируйте лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми.
7. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
8. Сформулируйте теорему о скрещивающихся прямых.

### Тема «ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ»

#### Студент должен знать:

- определение параллельных прямой и плоскости
- случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве
- формулировку теоремы о расположении плоскостей и параллельных прямых
- формулировку признака параллельности прямой и плоскости

#### Студент должен уметь:

- давать определение параллельных прямой и плоскости
- изображать на чертеже случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве
- формулировать теоремы о расположении плоскостей и параллельных прямых
- формулировать признак параллельности прямой и плоскости
- применять определения и теоремы при решении задач

### Семинарско-практическое занятие № 3 «Параллельность прямой и плоскости»

*«Я утверждаю, что в каждой науке  
можно найти собственно науку лишь постольку,  
поскольку в ней можно встретить математику»  
И. Кант*

#### План.

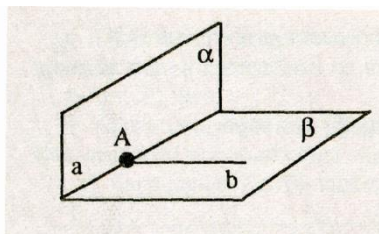
1. Систематизация знаний по теме «Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве»
2. Параллельность прямой и плоскости.

3. Решение задач по теме «Параллельность прямой и плоскости»
4. Домашнее задание.

# 1. Систематизация знаний по теме «Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве»

## 1. Проанализируйте решение задачи.

Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой  $a$ . Прямая  $b$  лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  – пересекаются.



### Доказательство.

1. Пусть  $\alpha \cap \beta = a$ ,  $b \subset \beta$  и  $b \cap \alpha = A$ .
2. Тогда  $A \in \alpha$  (т.к.  $b \cap \alpha = A$ ) и  $A \in \beta$  (т.к.  $b \subset \beta$  и  $A \in b \subset \beta$ ).
3. Значит,  $A \in a$  (т.к.  $\alpha \cap \beta = a$ ).
4. Имеем  $A \in b$  и  $A \in a$ , т.е.  $a \cap b = A$ .

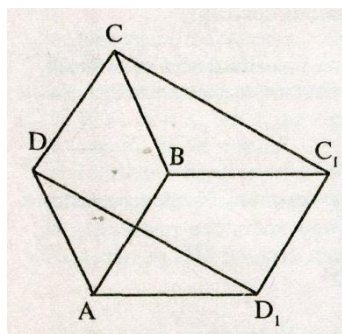
*Что и требовалось доказать.*

## 2. Рассмотрите решение следующей задачи и в скобках запишите, на основании, какого определения, признака или свойства сделаны утверждения.

Параллелограммы  $ABCD$  и  $ABC_1D_1$  лежат в разных плоскостях. Докажите, что четырехугольник  $CD D_1 C_1$  – параллелограмм.

**Дано:**  $ABCD$  и  $CDD_1C_1$  – параллелограммы.

**Доказать:**  $CDD_1C_1$  – параллелограмм.



### Доказательство.

1. Из  $ABCD$   
 $DC \parallel AB$  (по \_\_\_\_\_)  
 $DC \parallel AB$  (по \_\_\_\_\_)
2. Из  $CDD_1C_1$   
 $AB \parallel CDD_1C$  (по \_\_\_\_\_)  
 $AB = D_1C_1$  (по \_\_\_\_\_)
3. По признаку параллельности прямых имеем  
 $DC \parallel D_1C_1$ ,  $DC = D_1C_1$  (по \_\_\_\_\_),  
 значит  $CDD_1C_1$  – параллелограмм (по \_\_\_\_\_).

*Что и требовалось доказать.*

## 3. Параллельность прямой и плоскости.

1. Прямая и плоскость называются **параллельными**, если \_\_\_\_\_

2. Признак параллельности прямой и плоскости:

---



---



---



---

Сделайте рисунок

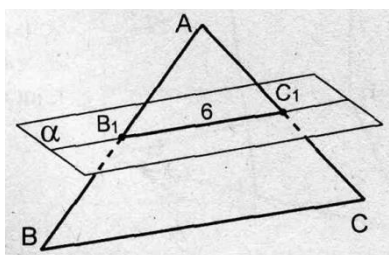
**Доказательство.**

1. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Теорема доказана.**

4. Решение задач по теме «Параллельность прямой и плоскости»

1.



**Дано:**

плоскость  $\alpha$  пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно.

$B_1C_1 \parallel BC$ ,  $AC_1: C_1C = 3:4$

**Найти:** BC.

**Решение.**

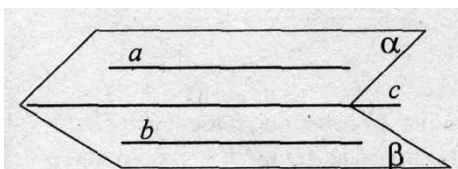
---

---

---

---

2.



**Дано:**

плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ .

Прямые  $a$  и  $b$  принадлежат плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно,  $a \parallel b$ .

**Доказать:**  $a \parallel b \parallel c$ .

**Доказательство.**

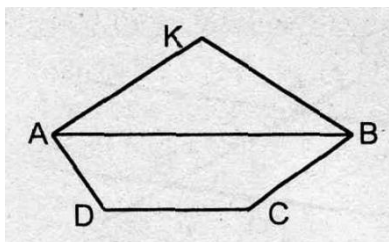
---

---

---

---

3.



**Дано:**

Точка K лежит вне плоскости трапеции ABCD.

**Доказать:**  $CD \parallel AKB$ .

**Доказательство.**

---

---

---

---

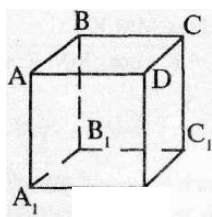
5. Домашнее задание: п.6; № 21, 24.

### Справочные материалы

1. Возможны **три случая** взаимного расположения двух прямых и плоскости в пространстве:

- а) прямая лежит в плоскости
  - б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т.е. пересекаются
  - в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки
2. Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.
3. **Признак параллельности прямой и плоскости:**  
Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
4. **Теоремы о расположении плоскостей и параллельных прямых:**
- 1°. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
  - 2°. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая, либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

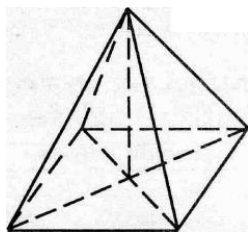
**Выберите ответ из числа предложенных**



1.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - куб. Как расположены:
- 1) ребра  $D_1 C_1$  и  $DC$  к грани  $ABB_1 A_1$ ?  
а) пересекаются; б) параллельны.
  - 2) ребра  $AA_1$  и  $D_1 C_1$ ?  
а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются.
2. Прямые  $a$  и  $b$  - параллельны. Прямая  $a$  не лежит в плоскости  $\alpha$ , прямая  $b$  принадлежит  $\alpha$ . Какое взаимное расположение прямой  $a$  и плоскости  $\alpha$ ?  
а) пересекаются; б) параллельны.

Ответ обоснуйте \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**Сделайте рисунок**



3. Основание пирамиды - квадрат. Как расположены стороны основания пирамиды к противоположным граням?

а) пересекаются; б) параллельны.

Ответ обоснуйте. \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

4. Если прямая  $a$  параллельна диагонали  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  и не лежит в плоскости параллелограмма, то как расположены прямые  $a$  и  $AC$ ?

а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются.

Ответ обоснуйте. \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**Сделайте рисунок**

### **Контрольные вопросы**

1. В каком случае прямая и плоскость в пространстве называются параллельными?
2. Перечислите возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.
3. Сформулируйте теоремы о расположении плоскостей и параллельных прямых.
4. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

### **Тема «ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ, ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУР. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ»**

#### **Студент должен знать:**

- понятие параллельной проекции точки
- понятие параллельной проекции фигуры
- способ параллельного проектирования
- основные свойства параллельного проектирования
- следствие из основных свойств параллельного проектирования
- определение угла между двумя пересекающимися прямыми
- определение угла между двумя скрещивающимися прямыми
- способы изображения отрезка, треугольника, параллелограмма, трапеции, окружности

#### **Студент должен уметь:**

- объяснять, что такое параллельная проекция точки
- объяснять, что такое параллельная проекция фигуры
- объяснять в чем заключается способ параллельного проектирования
- формулировать основные свойства параллельного проектирования
- формулировать следствие из основных свойств параллельного проектирования
- давать определение угла между двумя пересекающимися прямыми
- давать определение угла между двумя скрещивающимися прямыми
- строить на плоскости изображения отрезка, треугольника, параллелограмма, трапеции, окружности
- применять изученный материал при решении задач

### **Семинарско-практическое занятие № 4** **«Параллельное проектирование, изображение фигур»**

*«Математик так же, как и художник или поэт, создает узоры.  
Узоры математика так же, как узоры художника или поэта,  
должны быть прекрасны»  
Г.Х.Харди*

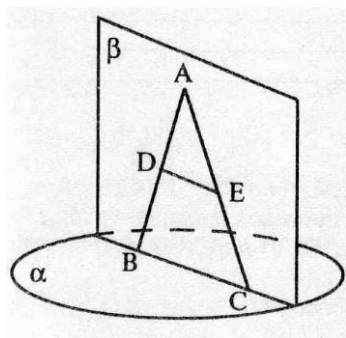
План.

1. Систематизация знаний по теме «Параллельность прямой и плоскости»
2. Параллельное проектирование. Изображение фигур.
3. Решение задач по теме «Параллельное проектирование, изображение фигур»
4. Домашнее задание.

#### **1. Систематизация знаний по теме «Параллельность прямой и плоскости»**

1. Проанализируйте решение задачи:

Из точки А к плоскости  $\alpha$  проведены два отрезка АС и АВ=9 см, точка D принадлежит АВ, точка Е принадлежит АС, DE параллельна  $\alpha$  и АЕ:ЕС=1:2. Найдите отрезки AD и DB.



Решение.

1. Проведем отрезок BC, пересекающие прямые AB и AC определяют плоскость, назовем ее  $\beta$ .
2.  $\beta \cap \alpha = BC$ ,  $DE \subset \beta$ ,  $DE \parallel \alpha$ , следовательно,  $DE \parallel BC$ .
3.  $AE:EC = AD:DB$  по теореме Фалеса, пусть  $AD=x$  и  $DB=9-x$ , тогда  $1:2 = x:(9-x)$ ,  $9-x = 2x$ ,  $x=3$  см, т.е.  $AD=3$  см.

Ответ.  $AD=3$  см,  $DB=6$  см.

2. Решите аналогичную задачу со следующими данными:  $AB=10$  см;  $AE:EC=2:3$ .

Решение. \_\_\_\_\_

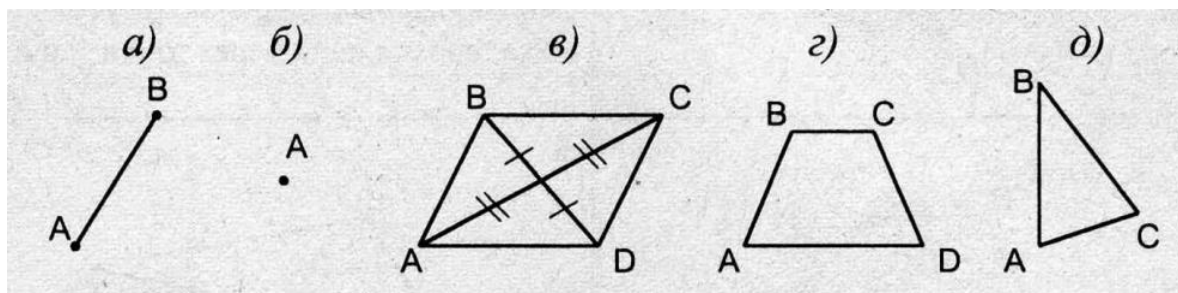
\_\_\_\_\_ Ответ. \_\_\_\_\_

## 2. Параллельное проектирование. Изображение фигур.

Учебное пособие «Геометрия 10-11» Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др., М.: Просвещение, 2017, стр.220-224

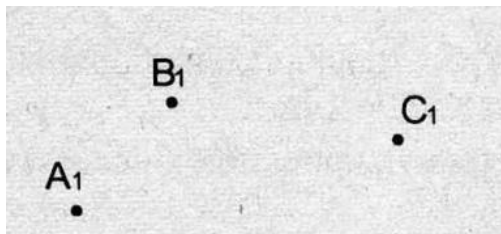
## 3. Решение задач по теме «Параллельное проектирование, изображение фигур»

1. Какая из фигур может быть параллельной проекцией квадрата?



Ответ. \_\_\_\_\_

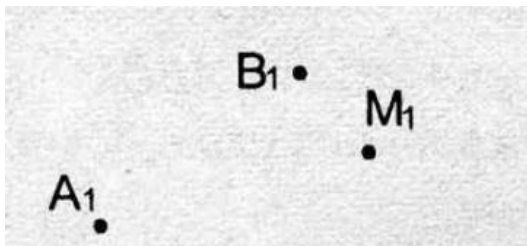
- 2.



Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  – параллельные проекции вершин параллелограмма ABCD. Построить проекцию вершины D.

Построение.

3.

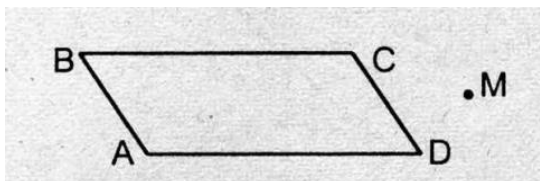


Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $M_1$  – параллельные проекции вершин  $A$  и  $B$  и точки пересечения медиан треугольника  $ABC$  соответственно.

Построить проекцию вершины  $C$ .

Построение.

4.



Четырехугольник  $ABCD$  – параллельная проекция прямоугольника. Построить проекции перпендикуляров, проведенных из точки  $M$  к сторонам прямоугольника.

Построение.

4. Домашнее задание: п.7, 9, приложение 1; № 40, 44.

### Справочные материалы

1. Точка  $A$  называется проекцией точки  $A_0$  на плоскость  $\pi$  при проектировании параллельно прямой  $l$ , где  $\pi$  – некоторая плоскость,  $l$  – пересекающая эту плоскость прямая.
2. Фигура  $F$  называется параллельной проекцией фигуры  $F_0$  на плоскость  $\pi$ , если все точки фигуры  $F$  являются параллельными проекциями соответствующих точек фигуры  $F_0$ .
3. Способ изображения фигур, при котором используются параллельные проекции точек, называется параллельным проектированием.
4. **Основные свойства параллельного проектирования:**
  - а) Проекция прямой есть прямая
  - б) Проекция отрезка есть отрезок
  - в) Проекции параллельных отрезков – параллельные отрезки или отрезки, принадлежащие одной прямой
  - г) Проекции параллельных отрезков, а также отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам
5. **Следствие из основных свойств параллельного проектирования:**  
Проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка.
6. Фигуру  $F'$ , полученную при параллельном проектировании фигуры  $F_0$  на плоскость  $\pi$  параллельно прямой  $l$ , называют изображением фигуры  $F_0$ .
7. Изображением отрезка является отрезок, треугольника – треугольник, параллелограмма – параллелограмм, трапеции – трапеция, у которой сохраняется отношение соответствующих

оснований, изображением окружности является эллипс.

8. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют угол, который не превосходит любой из трёх остальных углов, образованных при пересечении этих прямых.
9. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол, который образован прямыми, проходящими через произвольную точку параллельно данным скрещивающимся прямым.

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется, параллельной проекцией фигуры?
2. Какими свойствами обладает параллельное проектирование?
3. Какую фигуру называют изображением фигуры  $F_0$ ?
4. Что служит изображением отрезка, треугольника, параллелограмма трапеции, окружности?
5. Какой угол называется углом между двумя пересекающимися прямыми?
6. Какой угол называется углом между двумя скрещивающимися прямыми?

### **Тема «ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ»**

#### **Студент должен знать:**

- взаимное расположение двух плоскостей в пространстве
- определение параллельности двух плоскостей
- формулировку признака параллельности двух плоскостей
- формулировку свойств параллельных плоскостей

#### **Студент должен уметь:**

- изображать на чертеже случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве
- давать определение параллельности двух плоскостей
- формулировать признак параллельности двух плоскостей
- формулировать свойства параллельных плоскостей
- применять изученный материал при решении задач

### **Семинарско-практическое занятие № 5** **«Параллельность плоскостей»**

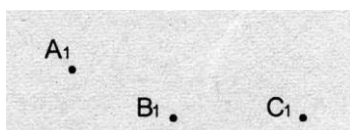
*«Наука только тогда достигает совершенства,  
когда ей удается пользоваться математикой».*  
**К.Маркс**

План.

1. Систематизация знаний по теме «Параллельное проектирование, изображение фигур»
2. Параллельность плоскостей.
3. Решение задач по теме «Параллельность плоскостей»
4. Домашнее задание.

#### **1. Систематизация знаний по теме «Параллельное проектирование, изображение фигур»**

1.



Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  – параллельные проекции вершин правильного шестиугольника  $ABCDEF$ .  
Построить проекцию шестиугольника.

Построение.

---

---

---

## 2. Параллельность плоскостей.

1. Две плоскости называются **параллельными**, если \_\_\_\_\_

2. **Признак параллельности плоскостей:** \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Сделайте рисунок

**Доказательство.**

1. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Теорема доказана.**

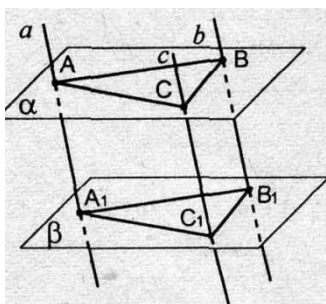
3.

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то  
линии их пересечения \_\_\_\_\_.

*Ответ поясните рисунком.*

## 3. Решение задач по теме «Параллельность плоскостей»

1.



Дано:  $a \parallel b \parallel c$ .

Доказать:  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ .

Доказательство.

---



---

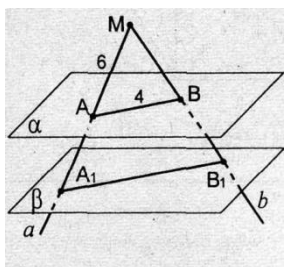


---



---

3.



Дано:

Прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $M$ .

$AA_1 = 3$ ,  $MB_1 = 12$ .

Найти:  $A_1B_1$ ,  $MB$  и  $BB_1$ .

Решение.

---



---

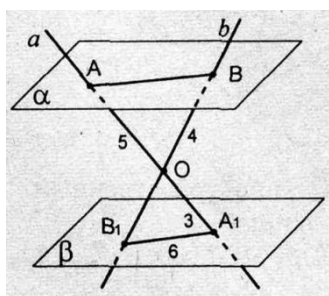


---



---

4.



Дано:

Прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $O$ .

Найти:  $AB$  и  $OB_1$ .

Решение.

---



---



---



---

4. Домашнее задание. п.10,11; № 50, 52.

### Справочные материалы

- Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве:  
Две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т.е. не имеют ни одной общей точки.
- Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.
- Признак параллельности двух плоскостей:**  
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
- Свойства параллельных плоскостей:**
  - Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.
  - Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, параллельны.

### Выберите ответ из числа предложенных

- Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны плоскости  $\gamma$ . Могут ли плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаться?  
а) да; б) нет. Ответ обоснуйте \_\_\_\_\_
- Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, параллельная каждой из двух данных \_\_\_\_\_

плоскостей?

а) да; б) нет. Ответ обоснуйте \_\_\_\_\_

3. Существенно ли в признаке параллельности плоскостей условие пересечения двух прямых?

а) да; б) нет. Ответ обоснуйте \_\_\_\_\_

4. Если прямая параллельна одной из двух параллельных плоскостей, то она параллельна и другой.

а) верно; б) не верно.

5. Могут ли быть параллельными прямые, полученные при пересечении двух пересекающихся плоскостей третьей плоскостью?

а) да; б) нет.

Ответ обоснуйте

---

---

---

---

**Сделайте рисунок**

### **Контрольные вопросы**

1. Каково взаимное расположение двух плоскостей в пространстве?
2. Какие две плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.
4. Сформулируйте свойства параллельных плоскостей.

### **Тема: «ТЕТРАЭДР И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ»**

Студент должен знать:

- какая поверхность называется тетраэдром, параллелепипедом
- что называется, гранью, ребром, вершиной
- какие ребра тетраэдра называются противоположными
- какие грани параллелепипеда называются смежным
- какие грани параллелепипеда называются противоположными
- что такое диагональ параллелепипеда
- свойства параллелепипеда.
- какая плоскость называется секущей плоскостью
- что называется, сечением тетраэдра
- что называется, сечением параллелепипеда
- как построить сечение тетраэдра плоскостью
- как построить сечение параллелепипеда плоскостью

Студент должен уметь:

- изображать на чертеже тетраэдр, параллелепипед
- указывать вершины, ребра и грани тетраэдра и параллелепипеда
- формулировать свойства параллелепипеда
- давать определение секущей плоскости
- формулировать свойство отрезков пересечения секущей плоскости с противоположными гранями параллелепипеда
- строить сечения тетраэдра и параллелепипеда плоскостью

**Семинарско-практическое занятие № 6**  
**«Тетраэдр и параллелепипед. Задачи на построение сечений»**

*«Знание – самое превосходное из владений.  
Все стремятся к нему, само оно не приходит».*  
*Абу-р-Райхан ал-Бируни*

План.

1. Систематизация знаний по теме «Параллельность плоскостей»
2. Тетраэдр. Параллелепипед.
3. Решение задач по теме «Тетраэдр и параллелепипед»
4. Задачи на построение сечений.
5. Домашнее задание.

**1. Систематизация знаний по теме «Параллельность плоскостей»**

1. Одна из сторон треугольника принадлежит плоскости  $\alpha$ . Плоскость  $\beta \parallel \alpha$  и  $\beta$  пересекает другие стороны треугольника. Докажите, что  $\beta$  отсекает от треугольника треугольник, подобный данному.



Доказательство.

---

---

---

---

---

2. Даны две параллельные плоскости. Через точки  $M$  и  $N$  одной из плоскостей проведены две параллельные прямые до пересечения в точках  $I$ . Чему равен периметр четырехугольника  $MNN_1M_1$ , если  $MN=MM_1=8$  см?

Решение.

---

---

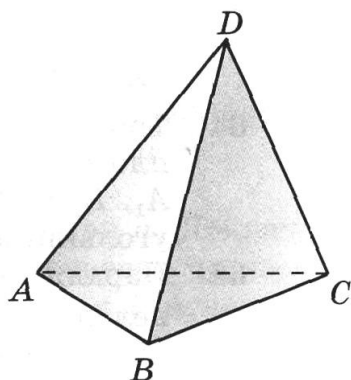
---

---

---

Сделайте рисунок

2. Тетраэдр. Параллелепипед.
- 1.



Тетраэдром называется \_\_\_\_\_

---

---

---

---

Гранями тетраэдра называются \_\_\_\_\_

---

Ребрами тетраэдра называются \_\_\_\_\_

---

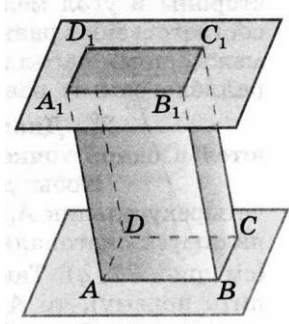
Вершины тетраэдра – \_\_\_\_\_

Тетраэдр имеет \_\_\_\_\_ грани, \_\_\_\_\_ ребер и \_\_\_\_\_ вершины.

Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются \_\_\_\_\_.

Основанием называют \_\_\_\_\_, а боковыми гранями \_\_\_\_\_

2.



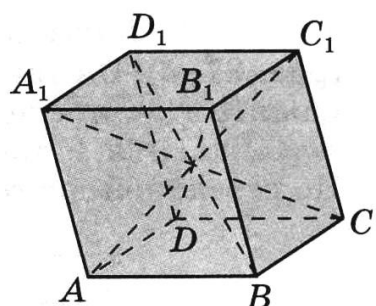
Две

Параллелепипедом называется \_\_\_\_\_

Гранями называются \_\_\_\_\_

Ребрами - \_\_\_\_\_, вершинами \_\_\_\_\_.

вершины называются **противоположными**, если



Свойства параллелепипеда.

Диагональю параллелепипеда называется отрезок \_\_\_\_\_

Основаниями называются \_\_\_\_\_

а остальные грани - \_\_\_\_\_.

Боковыми ребрами называются \_\_\_\_\_

1<sup>0</sup>. \_\_\_\_\_

Доказательство.

2<sup>0</sup>. \_\_\_\_\_

Доказательство.

---

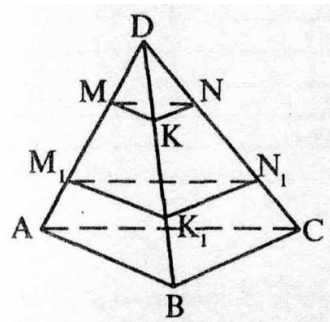
---

---

---

### 3. Решение задач по теме «Тетраэдр и параллелепипед»

1. В тетраэдре  $ABCD$  проведены две параллельные плоскости  $MNK$  и  $M_1N_1K_1$ . Докажите, что угол  $NMK$  равен углу  $N_1M_1K_1$ .



Доказательство.

---

---

---

---

---

---

2. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что  $AC \parallel A_1 C_1$  и  $BD \parallel B_1 D_1$ .

Решение.

---

---

---

---

---

Сделайте рисунок

### 4. Задачи на построение сечений.

1. Изобразите тетраэдр  $DABC$  и на рёбрах  $DB$ ,  $DC$  и  $BC$  отметьте соответственно точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ . Постройте точку пересечения: а) прямой  $MN$  и плоскости  $ABC$ ; прямой  $KN$  и плоскости  $ABD$ .

Построение.

---

---

---

---

---

2. Изобразите тетраэдр KLMN. а) Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину А ребра MN/ б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков LM, MA и МК, параллельная плоскости LKA. Найдите площадь треугольника EOF, если площадь треугольника LKA равна  $24 \text{ см}^2$ .

Построение.

---

Доказательство.

---



---

Решение.

---



---



---



---

Сделайте рисунок

3. Изобразите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и отметьте внутреннюю точку М грани  $AA_1 B_1 B$ . Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точку М параллельно: а) плоскости основания ABCD; б) грани  $BB_1 C_1 C$ ; в) плоскости  $BDD_1$ .

Построение.

---



---



---



---

4. Изобразите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро  $CC_1$  и точку пересечения диагоналей грани  $AA_1 D_1 D$ ; б) точку пересечения диагоналей грани ABCD параллельно плоскости  $AB_1 C_1$ .

Построение.

---



---



---



---

5. Домашнее задание. п.12,13, 14; № 66, 67, 72

**Справочные материалы**

1. Поверхность, составленная из четырех треугольников  $ABC$ ,  $DAВ$ ,  $ДВС$  и  $ДСА$ , называется тетраэдром (точка  $D$  не принадлежит плоскости  $ABC$ ).
2. Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются гранями, их стороны – ребрами, а вершины – вершинами тетраэдра.
3. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины.
4. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются противоположными.
5. Поверхность, состоящая из двух равных параллелограммов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , расположенных в параллельных плоскостях, и четырех параллелограммов  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CCD_1C_1$  и  $ДАА_1D_1$ , называется параллелепипедом.
6. Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны – ребрами, а вершины параллелограммов – вершинами параллелепипеда.
7. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин.
8. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих ребер – противоположными.
9. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются противоположными.
10. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда.
11. Свойства параллелепипеда:
  - а) Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны
  - б) Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам
12. Секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда) – это любая плоскость, по обе стороны которой есть точки тетраэдра (параллелепипеда).
13. Сечением тетраэдра (параллелепипеда) называется многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани.
14. Сечения тетраэдра – треугольники и четырехугольники.
15. Сечения параллелепипеда – треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники.
16. Если секущая плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны.
17. Для построения сечений тетраэдра и параллелепипеда достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами, потом соединить отрезками точки, лежащие в одной грани.

**Выберите ответ из числа предложенных**

1. Сечением куба может являться правильный шестиугольник,

а) верно; б) не верно.

Ответ поясните рисунком \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

---

**Сделайте рисунок**

2. Верно ли, что если плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда, то в сечении получается параллелограмм?

а) да; б) нет.

Ответ обоснуйте \_\_\_\_\_

---

---

---

---

**Сделайте рисунок**

### **Контрольные вопросы**

1. Какая поверхность называется тетраэдром, параллелепипедом?
2. Что называется гранью, ребром, вершиной?
3. Сколько граней, ребер и вершин имеет тетраэдр?
4. Сколько граней, ребер и вершин имеет параллелепипед?
5. Какие ребра тетраэдра называются противоположными?
6. Какие грани параллелепипеда называются смежными?
7. Какие грани параллелепипеда называются противоположными?
8. Что такое диагональ параллелепипеда?
9. Сформулируйте свойства параллелепипеда.
10. Что такое основание тетраэдра? Какие грани называются боковыми?
11. Что такое основания параллелепипеда?
12. Объясните, как построить тетраэдр, параллелепипед.
13. Какая плоскость называется секущей плоскостью?
14. Что называется сечением тетраэдра?
15. Что называется сечением параллелепипеда?
16. Какие многоугольники могут быть сечениями тетраэдра?
17. Какие многоугольники могут быть сечениями параллелепипеда?
18. Каким свойством обладают отрезки пересечения секущей плоскости с противоположными гранями параллелепипеда?
19. Как построить сечение тетраэдра плоскостью?
20. Как построить сечение параллелепипеда плоскостью?

### **Тема «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ»**

#### **Студент должен знать:**

- какие две прямые в пространстве называются перпендикулярными
- как могут быть расположены две перпендикулярные прямые
- формулировку
- какая прямая называется перпендикулярной к плоскости
- формулировку теоремы о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.
- формулировку признака перпендикулярности прямой и плоскости

#### **Студент должен уметь:**

- давать определение перпендикулярности двух прямых в пространстве
- давать определение перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве
- формулировать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей прямой
- формулировать признак перпендикулярности прямой и плоскости
- изображать на чертеже перпендикулярные прямую и плоскость
- применять изученные сведения при решении задач

### **Семинарско-практическое занятие № 7** **«Перпендикулярность прямой и плоскости»**

*«Ничто с такой силой не побуждает  
высокие умы над обогащением знания,  
как постановка трудной  
и в то же время полезной задачи».*  
**Иоганн I Бернулли**

#### **План.**

1. Систематизация знаний по теме «Тетраэдр и параллелепипед. Задачи на построение

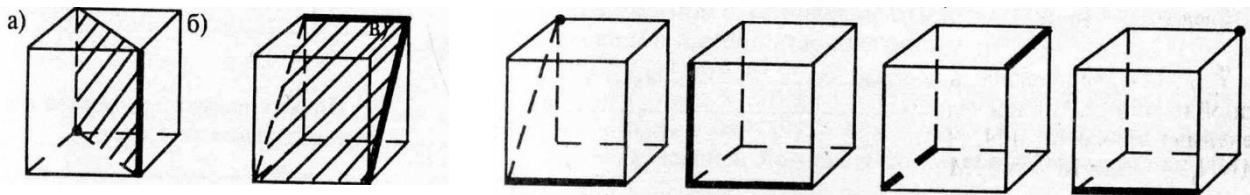
- сечений»
2. Перпендикулярность прямой и плоскости.
  3. Решение задач по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»
  4. Домашнее задание.

1. Систематизация знаний по теме «Тетраэдр и параллелепипед. Задачи на построение сечений»

1. В кубе проведите плоскость через выделенные элементы.  
Найдите линии пересечения этой плоскости с гранями и заштрихуйте полученный многоугольник.

Образцы.

Выполните задание, применяя известные аксиомы и теоремы.



2. Перпендикулярность прямой и плоскости.

1. Две прямые называются **перпендикулярными**, если \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Сделайте рисунок

2. Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Сделайте рисунок

3. Признак перпендикулярности прямой и плоскости: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Сделайте рисунок

Доказательство.

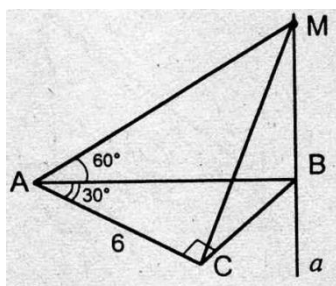
3. Решение задач «Перпендикулярность прямой и плоскости».

1. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD перпендикулярная плоскости треугольника. Чему равно расстояние от точки D до вершины C, если AC=6 см; AD=8 см?

Решение.

Сделайте рисунок

2. Найти MB.



Дано:

Найти:

Решение.

4. Домашнее задание. п.15 - 18; № 121, 124.

Справочные материалы

1. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^\circ$ .
2. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.
3. **Лемма:**  
Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.
4. Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

5. **Теорема 1:**

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

6. **Теорема 2:**

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

7. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости:**

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

8. **Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости**

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

**Выберите ответ из числа предложенных**

1. Как расположены друг к другу ребра, выходящие из одной вершины куба?

а) параллельны; б) скрещиваются; в) под прямым углом.

Ответ поясните \_\_\_\_\_

2. Как расположены боковые ребра куба к плоскостям верхней и нижней грани?

а) параллельны; б) перпендикулярны.

Ответ поясните \_\_\_\_\_

3. Как расположены плоскости боковых граней куба к передним ребрам верхнего и нижнего оснований?

а) перпендикулярны; б) параллельны.

Ответ поясните \_\_\_\_\_

4. Каким условием является признак перпендикулярности прямой и плоскости?

а) необходимым; б) достаточным; в) необходимым и достаточным.

5. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна лежащим в этой плоскости:

- двум диаметрам круга;

а) да; б) нет.

- двум сторонам треугольника;

а) да; б) нет.

- двум сторонам трапеции.

а) да; б) нет.

Ответ поясните \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

6. Что можно сказать:

1) о трех прямых, перпендикулярных к одной плоскости?

2) о четырех прямых, перпендикулярных к одной плоскости?

а) пересекаются; б) параллельны.

Ответ поясните \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Сделайте рисунок**

**Контрольные вопросы**

1. Какие две прямые в пространстве называются перпендикулярными?

2. Как могут быть расположены две перпендикулярные прямые?

3. Сформулируйте лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей прямой.

4. Какая прямая называется **перпендикулярной к плоскости**?

5. Сформулируйте теоремы о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.
6. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
7. Сформулируйте теорему о прямой, перпендикулярной к плоскости.

### **Тема «ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ»**

Студент должен знать:

- какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к плоскости.
- какой отрезок называется наклонной, проведенной из данной точки к плоскости.
- какой отрезок называется проекцией наклонной на плоскость.
- определение расстояния от точки до плоскости
- определение расстояния между параллельными плоскостями
- определение расстояния между прямой и плоскостью
- определение расстояния между скрещивающимися прямыми
- формулировку теоремы о трех перпендикулярах
- что называется проекцией точки на плоскость
- что является проекцией прямой на плоскость, проекцией отрезка на плоскость
- определение угла между прямой и плоскостью
- способы построения выше перечисленных геометрических фигур

Студент должен уметь:

- объяснять, что такое перпендикуляр, наклонная, проекция наклонной на плоскость
- давать определения расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями, расстояния между прямой и плоскостью, расстояния между скрещивающимися прямыми
- формулировать теорему о трех перпендикулярах
- что называется, проекцией точки на плоскость
- что является проекцией прямой на плоскость, проекцией отрезка на плоскость
- давать определение угла между прямой и плоскостью
- изображать на чертеже перпендикуляр, наклонную, проекцию наклонной
- применять изученные сведения при решении задач

### **Семинарско-практическое занятие № 8** **«Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью»**

*«Конечно, будем учиться доказывать,  
но будем также учиться догадываться».*  
**Д. Пойа**

План.

1. Систематизация знаний по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»
2. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.
3. Решение задач по теме «Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью»
4. Домашнее задание.

#### **1. Систематизация знаний по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»**

1. Докажите, что боковое ребро куба перпендикулярно плоскости грани верхнего (нижнего) основания.

**Доказательство.**

---

---

---

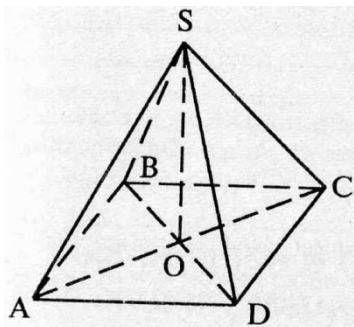
---

---

---

Сделайте рисунок

2. Дан параллелограмм  $ABCD$ , где  $SA=SC$ ;  $SB=SD$ . Доказать, что  $SO$  перпендикулярна  $ABCD$ .



Дано:

Доказать:

Доказательство.

2. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.

1. Перпендикуляром, проведённым из данной точки **к данной плоскости**, называется \_\_\_\_\_
2. Основанием перпендикуляра называется \_\_\_\_\_
3. Расстоянием от точки до плоскости называется \_\_\_\_\_
4. Наклонной, проведенной из данной точки **к данной плоскости**, называется \_\_\_\_\_
5. Основанием наклонной называется \_\_\_\_\_
6. Проекцией наклонной на плоскость называется \_\_\_\_\_

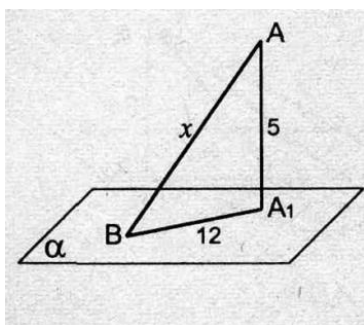
Сделайте соответствующий рисунок с поясняющими записями к п.1-6

7. Теорема о трёх перпендикулярах: \_\_\_\_\_
8. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется \_\_\_\_\_

3. Решение задач по теме «Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью»

1.  $AA_1$  – перпендикуляр к плоскости  $\alpha$ ,  $AB$  и  $AC$  – наклонные. Найти  $x$  и  $y$ .

а)



Дано:

---

Найти:

Решение.

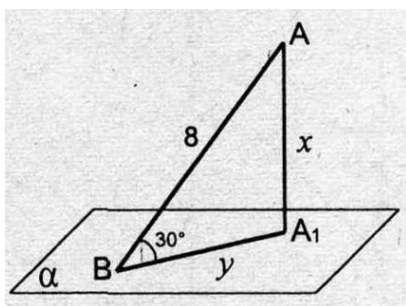
---

---

---

---

б)



Дано:

---

Найти:

Решение.

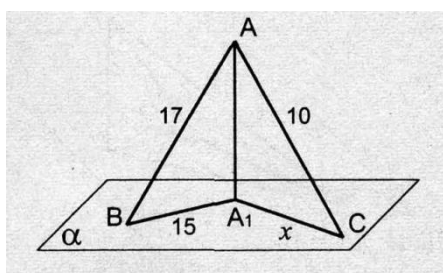
---

---

---

---

в)



Дано:

---

Найти:

Решение.

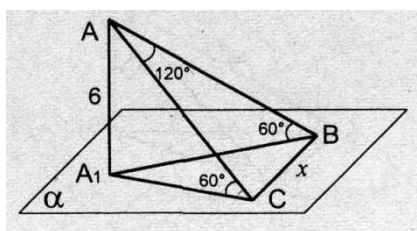
---

---

---

---

г)



Дано:

Найти:

Решение.

4. Домашнее задание. п.19,20, 21; № 140, 141.

### Справочные материалы

1. Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.
2. Длина перпендикуляра, проведенного из точки А к плоскости  $\alpha$ , называется расстоянием от точки А до плоскости  $\alpha$ .
3. Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется расстоянием между параллельными плоскостями.
4. Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.
5. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.
6. **Теорема о трех перпендикулярах:**  
Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
7. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.
8. Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.
9. Проекцией отрезка АВ, не перпендикулярного к плоскости, является отрезок, концами которого служат проекции точек А и В.
10. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

### Выберите ответ из числа предложенных

1. В пространстве можно построить три перпендикулярные прямые, проходящие через одну точку.  
а) верно; б) не верно.
2. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.  
а) верно; б) не верно.
3. Если один катет равнобедренного треугольника принадлежит плоскости  $\alpha$ , а другой катет образует с ней угол в  $45^\circ$ , то гипотенуза образует с плоскостью  $\alpha$  угол в  $30^\circ$ .  
а) верно; б) не верно.

### **Сделайте рисунок**

4. Угол, образованный наклонной и плоскостью, не больше угла между этой наклонной и любой прямой плоскости.  
а) верно; б) не верно.
5. Угол между прямой и плоскостью находится в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (т.е.  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ).  
а) верно; б) не верно.

### **Контрольные вопросы**

1. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к плоскости.
2. Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведенной из данной точки к плоскости.
3. Объясните, какой отрезок называется проекцией наклонной на плоскость.
4. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
5. Что называется расстоянием между параллельными плоскостями?
6. Что называется расстоянием между прямой и плоскостью?
7. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?
8. Сформулируйте теорема о трех перпендикулярах.
9. Что называется проекцией точки на плоскость?
10. Что является проекцией прямой на плоскость, проекцией отрезка на плоскость?
11. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.

### **Тема «ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ»**

#### **Студент должен знать:**

- определения двугранного угла, градусной меры двугранного угла, соответствующего линейного угла, перпендикулярных плоскостей
- формулировку признака перпендикулярности двух плоскостей
- формулировку следствия из признака перпендикулярности двух плоскостей

#### **Студент должен уметь:**

- давать определения двугранного угла, градусной меры двугранного угла, соответствующего линейного угла, перпендикулярных плоскостей
- формулировать признак перпендикулярности двух плоскостей
- формулировать следствие из признака перпендикулярности двух плоскостей
- давать определение перпендикулярности двух плоскостей
- изображать на чертеже двугранный угол, соответствующий линейный угол, перпендикулярные плоскости
- применять изученный материал при решении задач

### **Семинарско-практическое занятие № 9** **«Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей»**

*«Три пути ведут к знанию:  
Путь размышления – самый благородный,  
Путь подражания – самый легкий,  
И путь опыта – это путь самый горький...».*  
**Конфуций**

#### **План.**

1. Систематизация знаний по теме «Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью»
2. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.
3. Решение задач по теме «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей»
4. Домашнее задание.

1. Систематизация знаний по теме «Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью»

1. Решите задачу:

а) Точка А отстоит от плоскости на расстоянии 12 см. найдите длины наклонных, проведенных из этой точки, если они образуют с плоскостью углы: а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $60^\circ$ .

**Решение.**

- а) \_\_\_\_\_  
б) \_\_\_\_\_  
в) \_\_\_\_\_

**Сделайте рисунок**

б) Угол ВАС равен  $46^\circ$ , угол АСВ равен  $44^\circ$ , AD – перпендикуляр к плоскости ABC. Как взаимно расположены прямые CB и BD?

**Решение.**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Сделайте рисунок**

в) Расстояния от точки А до вершин квадрата равны 5 см. чему равно расстояние от А до плоскости квадрата со стороной 2 см?

**Решение.**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Сделайте рисунок**

2. Двугранный угол. Угол между прямой и плоскостью.

1. Двугранным углом называется фигура, образованная \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. Граними двугранного угла называются \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. Ребром двугранного угла называется \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
4. Линейным углом двугранного угла называется \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
5. Двугранный угол измеряется \_\_\_\_\_
6. Двугранный угол называется  
а) **прямым**, если \_\_\_\_\_  
б) **тупым**, если \_\_\_\_\_  
в) **острым**, если \_\_\_\_\_

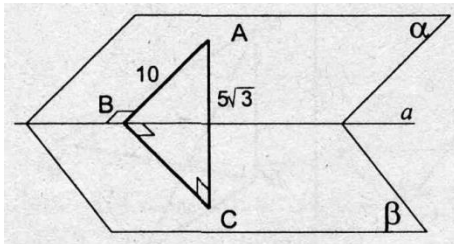
Сделайте соответствующие рисунки и обозначьте двугранные углы.

|                           |                          |                           |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| а) прямой двугранный угол | б) тупой двугранный угол | в) острый двугранный угол |
|                           |                          |                           |

### 3. Решение задач по теме «Двугранный угол. Угол между прямой и плоскостью»

1. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . Найти угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

a)



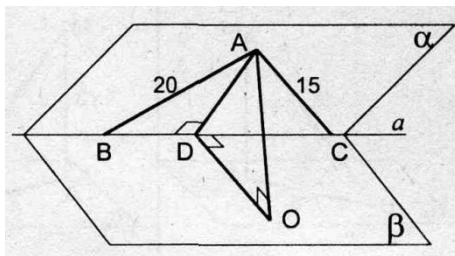
Дано:

Найти:

**Решение.**

**Ответ.**

6)



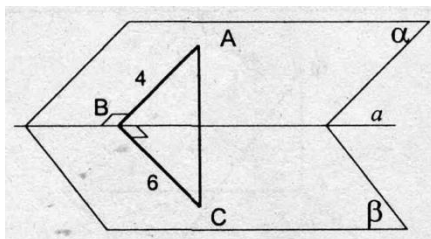
Дано:

Найти:

**Решение.**

**Ответ.**

**B)**



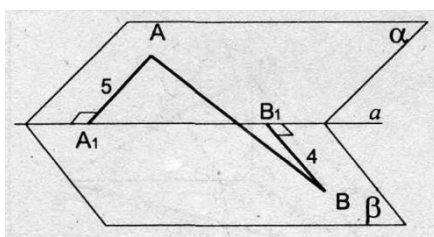
Дано:

Найти:

**Решение.**

**Ответ.**

Γ)



Дано:

Найти:

**Решение.**

---

---

---

Ответ.

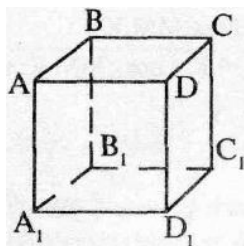
4. Домашнее задание. п.22, 23; № 172, 187; п.24 изучить самостоятельно.

**Справочные материалы**

1. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой  $a$  и двумя полуплоскостями с общей границей  $a$ , не принадлежащими одной плоскости.
2. Общая граница полуплоскостей называется ребром двугранного угла.
3. Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.
4. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.
5. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^\circ$ .
6. **Признак перпендикулярности двух плоскостей:**  
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.
7. **Следствие:**  
Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

**Выберите ответ из числа предложенных**

1. Угол между пересекающимися плоскостями равен меньшему из двугранных углов, ими образованными.  
а) верно; б) не верно.
2. Угол между параллельными плоскостями равен:  
а)  $0^\circ$ ; б)  $180^\circ$ ; в)  $360^\circ$ .
3. Верно ли, что для построения линейного угла данного двугранного угла нужно построить:  
- угол между двумя перпендикулярами, проведенными из одной точки ребра данного двугранного угла?  
а) верно; б) не верно  
Ответ поясните, в случае отрицательного ответа приведите контрпример \_\_\_\_\_  
- угол между двумя перпендикулярами к ребру, проведенными в каждой грани данного двугранного угла?  
а) верно; б) не верно.
4. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Чему равен угол:  
- между плоскостью нижней грани и плоскостью, проходящей через прямые  $A_1 B_1$  и  $BC$ ?  
а)  $60^\circ$ ; б)  $40^\circ$ ; в)  $45^\circ$ ; г)  $100^\circ$ .  
- между плоскостями двух противоположных граней?  
а)  $30^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $0^\circ$ ; г)  $45^\circ$ .  
- между плоскостями двух смежных граней?  
а)  $0^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $45^\circ$ ; г)  $90^\circ$ .



### Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется двугранным углом?
2. Что является градусной мерой двугранного угла?
3. Какие две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными?
4. Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.
5. Сформулируйте следствие из признака перпендикулярности двух плоскостей.

### Семинарско-практическое занятие № 10

#### Решение задач по теме «Прямые и плоскости в пространстве»

#### Контрольная работа «Прямые и плоскости в пространстве»

*«Будь благословенно божественное число, породившее богов и людей».*

*Пифагор*

План.

1. Систематизация знаний по теме «Прямые и плоскости в пространстве»
2. Контрольная работа №1 «Прямые и плоскости в пространстве»

#### Студент должен знать:

- определения основных понятий, изученных в данном разделе
- формулировки аксиом и теорем по данной теме
- приемы построения изображений геометрических фигур

#### Студент должен уметь:

- давать определения основных понятий, изученных в данном разделе
- формулировать аксиомы и теоремы по данной теме
- выполнять необходимые построения
- применять изученный материал при решении задач

#### **1. Систематизация знаний по теме «Прямые и плоскости в пространстве»**

1. Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются \_\_\_\_\_
2. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, \_\_\_\_\_, и притом только одна.
3. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она \_\_\_\_\_
4. Основные свойства параллельного проектирования:
  - a. Проекция прямой есть \_\_\_\_\_
  - b. Проекция отрезка есть \_\_\_\_\_
  - c. Проекции параллельных отрезков – \_\_\_\_\_ или отрезки, принадлежащие \_\_\_\_\_
  - d. Проекции параллельных отрезков, а также отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны \_\_\_\_\_
5. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, \_\_\_\_\_
6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то \_\_\_\_\_ пересечения параллельны.
7. Отрезки параллельных прямых, \_\_\_\_\_ плоскостями, параллельны.
8. Свойства параллелепипеда:
  - a. Противоположные грани параллелепипеда \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_
  - b. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и \_\_\_\_\_ этой точкой

9. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и \_\_\_\_\_ перпендикулярна к этой плоскости.
10. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то \_\_\_\_\_ плоскости.
11. Через любую точку пространства проходит прямая \_\_\_\_\_ плоскости, и притом только одна.
12. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной \_\_\_\_\_ на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
13. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, \_\_\_\_\_ из этих плоскостей
14. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то \_\_\_\_\_
15. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна \_\_\_\_\_

**Решите задачи.**

1. Изобразите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью  $MNK$ , где точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  лежат соответственно на ребрах  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $DC$ .

Дано:

\_\_\_\_\_

Построить:

Построение.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

2. Плоскость, пересекая две стороны треугольника  $ABC$ , делит их в отношении  $AA_1 : A_1 C = BB_1 : B_1 C = 2:3$ . Найдите длину отрезка  $A_1 B_1$ , если  $AB = 15\text{см}$

Дано:

\_\_\_\_\_

Найти:

Решение.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

3. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если они относятся как

1:2, а соответствующие им проекции равны 1 см и 7 см.

Дано:

Найти:

Решение.

---

---

---

---

---

**Материалы для подготовки к контрольной работе по теме**  
**«ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ».**

1. Изобразите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью  $MNK$ , где точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  лежат соответственно на ребрах  $BB_1$ ,  $AA_1$ ,  $AD$ .
2. Изобразите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью  $MNK$ , где точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  лежат соответственно на ребрах  $CC_1$ ,  $AD$ ,  $BB_1$ .
3. Плоскость, параллельная прямой  $AB$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $A_1$ , сторону  $BC$  - в точке  $B_1$ . Найдите отрезок  $A_1 B_1$ , если  $AB = 25$  см,  $AA_1 : A_1 C = 2 : 3$ .
4. Через конец  $A$  отрезка  $AB$  проведена плоскость; через конец  $B$  и точку  $C$  отрезка  $AB$  проведены параллельные прямые, пересекающиеся с плоскостью в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Найдите длину отрезка  $CC_1$ , если  $BB_1 = 15$  см и  $AB_1 : C_1 B_1 = 3 : 1$ .
5. Из точки к плоскости проведены две наклонные длиной 4 см и 8 см. Найдите расстояние от точки до плоскости, если их проекции относятся как 1:7.
6. Из точки к плоскости проведены две наклонные, длины которых равны 23 см и 33 см. Найдите расстояние от точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.