

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ЕГЭ В18 С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ ИСТИННОСТИ (В СООТВЕТСТВИИ С ФГОС)

Аннотация: В18 – это **задание** повышенного уровня сложности. Проверяемые элементы содержания: — знание основных понятий и законов математической логики. Элементы содержания: высказывания, их истинность и ложность, логические операции, кванторы, множества, битовые маски. Они являются фундаментальными в алгоритмизации и программирования. В современном программировании роль этих понятий будет только нарастать. Их освоение даже сильными обучающимися профильного и углубленного уровня вызывает значительное затруднение. Недаром данное задание считается одним из самых сложных на ЕГЭ по информатике.

Применение таблиц истинности для решения этих заданий позволяет сделать их решение более технологичным, более понятным и значительно сократить время решения. Это касается заданий на интервалы и подавляющего большинства заданий на битовые маски

В данной статье приведены решения 10 заданий тематических тестов ЕГЭ b18 (проверка истинности логического выражения) с сайта <http://kpolyakov.spb.ru/school/egetest/b18.htm> К.Полякова [2., с.1-3]. Задания из темы решены все, в том числе 6 из них (№№ 1, 2, 3, 5, 9, 10) – с помощью таблиц истинности. Эти задания №№ 1, 2, 3, 5 – на интервалы, а №№ 9, 10 – на битовые маски. Остальные задания решены традиционными способами.

Ключевые слова: истинность логического выражения, логические задачи с отрезками, логические задачи с интервалами, логические задачи на битовые маски, битовые маски, логика и множества, алгебра логики.

Задание b18-01

1. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [5, 10]$ и $Q = [15, 18]$.

Выберите такой отрезок А, что формула $((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1. $[3, 11]$ 2. $[6, 10]$ 3. $[8, 16]$ 4. $[17, 23]$

Решение:

$P = 5 \dots 10$ $Q = 15 \dots 18$

Имеющиеся интервалы: .. 5 .. 10 .. 15 .. 18 ..

$F = (A \rightarrow P) + Q \equiv 1,$

$F = \bar{A} + (P + Q) \equiv 1,$ [1, стр.167]

$F = (P + Q) + \bar{A} \equiv 1$ Составляем таблицу истинности с учетом интервалов:

X	P	Q	P+Q	$\bar{A}$	F	
<5	0	0	0	1	1	
5..10	1	0	1	1/0 любое	1	2) Отрезок 6..10 полностью входит в этот интервал
10..15	0	0	0	1	1	
15..18	0	1	1	1/0 любое	1	
> 18	0	0	0	1	1	

Ответ: вариант 2

Задание b18-02

2. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [5, 15]$ и $Q = [10, 20]$.

Выберите такой отрезок А, что формула $(x \in P) \wedge (x \notin Q) \wedge (x \in A)$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

1. $[0, 7]$ 2. $[8, 15]$ 3. $[15, 20]$ 4. $[7, 20]$

Решение:

$P = 5...15$ $Q = 10...20$ $F = P \cdot \bar{Q} \cdot A \equiv 0$ Имеющиеся интервалы: .. 5 .. 10 .. 15 .. 20 ..

X	P	Q	$\bar{Q}$	$P \cdot \bar{Q}$	A	F	
< 5	0	0	1	0	0/1	0	
5..10	1	0	1	1	0	0	
10..15	1	1	0	0	0/1	0	
15..20	0	1	0	0	0/1	0	3) 15..20 полностью входит
> 20	0	0	1	0	0/1	0	

Ответ: 3

Задание b18-03

3. На числовой прямой даны три отрезка: $P = [15, 30]$, $Q = [5, 10]$ и $R = [20, 25]$.

Выберите такой отрезок A, что формула $((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge ((x \notin A) \rightarrow (x \in R))$ тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

1. $[0, 20]$ 2. $[0, 10]$ 3. $[10, 15]$ 4. $[25, 30]$.

Решение:

$(P \rightarrow Q) \wedge (\bar{A} \rightarrow R) \equiv 0$, $(\bar{P} + Q) \cdot (A + R) \equiv 0$ Имеющиеся интервалы: .. 5 .. 10 .. 15 .. 20 .. 25 .. 30 ..

	P	$\bar{P}$	Q	$\bar{P}+Q$	R	A + R	A	
< 5	0	1	0	1	0	0	0	
5..10	0	1	1	1	0	0	0	
10..15	0	1	0	1	0	0	0	
15..20	1	0	0	0	0	0/1	0/1	Пойдет любое A в интервале 15..30, в том числе 4) 25..30
20..25	1	0	0	0	1	0/1	0/1	
25..30	1	0	0	0	0	0/1	0/1	
> 30	0	1	0	1	0	0	0	

Ответ: 4

Задание b18-4

4. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение $\neg (x \in A) \rightarrow \neg ((x \in \{1, 2, 4, 8\}) \vee (x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$ истинно (т.е. принимает значение 1) при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное количество элементов множества A.

Решение:

Обозначим $P = \{1, 2, 4, 8\}$; $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\bar{A} \rightarrow (\bar{P} + \bar{Q})$

$A + \overline{\bar{P} + \bar{Q}} \equiv 1;$

$\overline{\bar{P} + \bar{Q}} + A \equiv 1;$

$(P + Q) \rightarrow A \equiv 1$

$P + Q \rightarrow A \equiv 1;$

Слияние множеств $P + Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Количество элементов множества: 7

Ответ: 7

Задание b18-5

5. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [12; 26]$ и $Q = [30; 53]$.

Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Решение:

$$F = A \rightarrow (P + Q) = \bar{A} + P + Q \equiv 1, \quad (P + Q) + \bar{A} \equiv 1 \quad \text{Имеющиеся интервалы: } \dots 12 \dots 26 \dots 30 \dots 53 \dots$$

X	P	Q	P+Q	$\bar{A}$	F	Примечание
< 12	0	0	0	1	1	
12..26	1	0	1	0/1 любое	1	Удовлетворяет. Длина 14
26..30	0	0	0	1	1	
30..53	0	1	1	0/1 любое	1	Удовлетворяет. Длина 23
> 53	0	0	0	1	1	

Наибольший отрезок: 23

Ответ: 23

Задание b18-6 [3, стр.1-2]

6. Обозначим через ДЕЛ (n, m) утверждение “натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ”. Для какого наибольшего натурального числа A формула $(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 6)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 3)$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

$$\bar{A} \cdot 6 \rightarrow \bar{3} \equiv 1 \quad \text{для всех } X$$

$$\bar{A} \cdot 6 + \bar{3} \equiv 1 \quad \text{по закону де Моргана} \quad A + \bar{6} + \bar{3} \equiv 1 \quad \text{или так} \quad \bar{6} + \bar{3} + A \equiv 1$$

$$\bar{6} \cdot \bar{3} \rightarrow A \equiv 1$$

$$6 + 3 \rightarrow A \equiv 1$$

Для этого достаточно, чтобы число делилось на 3 или на 6 (делящиеся на 6 – большие числа) 6, 12, 18, 24 ... Все эти числа должны делиться на A . Если возьмем $A = 12$ или 18, то 6 не делится ни на одно из них. Следовательно, самое большое удовлетворяющее число: 6

Ответ: 6

Задание b18-7 [3, стр.1-2]

7. Обозначим через ДЕЛ (n, m) утверждение “натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ”. Для какого наименьшего натурального числа A формула $\neg \text{ДЕЛ}(x, 18) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 21) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A))$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

$$18 \rightarrow (\bar{21} \rightarrow \bar{A}) \equiv 1 \quad \text{для всех натуральных } x$$

$$18 + 21 + \bar{A} \equiv 1 \quad \text{как числа делящиеся на 18, так и числа делящиеся на 21}$$

множество 18, 36, 54, 42, 63

Наименьшее число из них: 18

Ответ: 18

Задание b18-8 [3, стр.1-2]

8. Обозначим через ДЕЛ (n, m) утверждение “натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ”. Для какого наименьшего натурального числа A формула $(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \text{ДЕЛ}(x, 15))$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

$$A \cdot \bar{15} \rightarrow 18 + 15 \equiv 1 \quad \text{для всех натуральных } x$$

$$A \cdot \bar{15} + 18 + 15 \equiv 1;$$

$$\bar{A} + 15 + 18 + 15 \equiv 1$$

$$\boxed{15 + 18 + \bar{A} \equiv 1}$$

15, 30, 36, 45, 54, 60, 72

Наименьшее число: 15

Ответ: 15

Задание b18-9

9. Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое “И” между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение $(x \& 56 \neq 0) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$ тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

$F = (56 \neq 0) \rightarrow (48 = 0 \rightarrow A \neq 0) \equiv 1$ для всех натуральных x

$F = (56 = 0) + (48 \neq 0) + (A \neq 0) \equiv 1$

Разряд числа X	56 = 0 111000	48 ≠ 0 110000	(56=0) + (48≠ 0)	A≠0	F	Примечание
000001	1	0	1	0/1	1	Любая цифра (0,1)
000010	1	0	1	0/1	1	Любая цифра (0,1)
000100	1	0	1	0/1	1	Любая цифра (0,1)
001000	0	0	0	1	1	В этом разряде должна быть 1
010000	0	1	1	0/1	1	Любая цифра (0,1)
100000	0	1	1	0/1	1	Любая цифра (0,1)

Минимальное число: 8

Ответ: 8

Задание b18-10

10. Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое “И” между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение $(x \& 76 \neq 0) \rightarrow ((x \& 10 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$ тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

$F = (76 \neq 0) \rightarrow ((10 = 0) \rightarrow (A \neq 0)) \equiv 1$ для всех натуральных x

$F = (76 = 0) + (10 \neq 0) + (A \neq 0) \equiv 1$

Разряд числа X	76=0 1001100	10≠0 0001010	(76=0) + (10≠0)	A≠0	F	Наименьшее число
0000001	1	0	1	0/1	1	0/1 любая цифра
0000010	1	1	1	0/1	1	0/1 любая цифра
0000100	0	0	0	1	1	только 1
0001000	0	1	1	0/1	1	0/1 любая цифра
0010000	1	0	1	0/1	1	0/1 любая цифра
0100000	1	0	1	0/1	1	0/1 любая цифра
1000000	0	0	0	1	1	только 1

Наименьшее значение: 1000100 = 68

Ответ: 68

Литература:

1. К.Ю.Поляков, Е.А.Еремин. Информатика, углубленный уровень, учебник для 10 класса в 2-х частях, часть 1, 2-е издание, исправленное, Москва, БИНОМ, Лаборатория Базовых Знаний, 344с.
2. Тематические тесты онлайн -10 заданий с сайта К. Полякова.
3. Множества и логика в задачах ЕГЭ. Журнал «Информатика» № 10 за 2015г. Электронная версия.