**Аналогия в преподавании математики**

**1**. Аналогия.

**2**. Аналогия в процессе обучения математике.

**3**. Применение аналогии при решении задач.

**4**. Ошибки, связанные с применением аналогии.

**1**. Одним из весьма важных типов умозаключений является так называемое *традуктивное умозаключение* (лат. Traductio – перемещение), при котором от двух или нескольких суждений некоторой степени общности переходят к новому суждению той же степени общности.

Например, пусть a, b и c – некоторые действительные числа,

a > b (первое суждение),

b > c (второе суждение).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

а > c (новое суждение).

Как метод исследования традукция заключается в том, что, установив сходство двух объектов в некотором отношении, делаю вывод о сходстве тех же объектов и в другом отношении.

Важнейшим видом традуктивного умозаключения является *аналогия* (греч. Analogia – соответствие, сходство).

«При умозаключении по аналогии знание, полученное из рассмотрения какого-либо объекта («Модели»), переносится на другой, менее изученный (менее доступный для исследования, менее наглядный и т. п.) в каком-либо смысле объект. По отношению к конкретным объектам заключения, получаемые по аналогии, носят, вообще говоря, лишь вероятный характер; они являются одним из источников научных гипотез, индуктивных рассуждений и играют важную роль в научных открытиях» [75, c. 567].

Наиболее глубоким видом аналогии, приводящим к совершенно достоверным выводам, является *изоморфизм*. Установив изоморфность двух или нескольких систем объектов, мы можем перенести любое предложение, справедливое для одной из этих систем, на другую систему объектов. В этом случае, детально изучив одну систему объектов, мы можем не проводить этого изучения для систем объектов, изоморфных изученной. Ярким примером служит аналитическая геометрия, в которой изучение геометрических фигур и их свойств сводится к изучению определенных аналитических соответствий над числовыми объектами.

Аналогия различается на:

1) простую аналогию, при которой по сходству объектов в некоторых признаках заключают о сходстве их в других признаках;

2) распространенную аналогию, при которой на сходстве явлений делают вывод о сходстве причин.

В свою очередь, простая и распространенная аналогия может быть:

а) строгой аналогией, при которой признаки сравниваемых объектов находятся во взаимной зависимости;

б) нестрогой аналогией, при которой признаки сравниваемых объектов не находятся в явной взаимной зависимости.

Аналогия является, пожалуй, одним из самых распространенных методов научного исследования. Широкое применение аналогий часто приводит исследователя к более или менее правдоподобным предположениям о свойствах изучаемого объекта, которые могу быть затем подтверждены или опровергнуты опытом или более строгими рассуждениями.

Таким образом, имеет смысл говорить о «полезной» и о «вредной» аналогии. Примером «полезной аналогии» является, в частности, мысленный перенос многих понятий и суждений, относящихся к планиметрии, в геометрия трехмерного пространства. Например: «Прямоугольник аналогичен прямоугольному параллелепипеду. В самом деле, отношения между сторонами прямоугольника сходны с отношениями между гранями параллелепипеда:

Каждая сторона прямоугольника параллельна и равна одной другой стороне и перпендикулярна остальным.

Каждая грань прямоугольного параллелепипеда параллельна и равна одной другой грани и перпендикулярна остальным» [1.136, с. 44].

Заметим, что не менее явная аналогия существует и между площадью прямоугольника и объемом прямоугольного параллелепипеда. Причем эта аналогия проявляется весьма широко, начиная от сходства формул S= a \* b и V= a \* b \* c и кончая сходством в структуре вывода этих формул ( распадающегося на случаи, когда изменения названых фигур выражаются натуральными, положительными рациональными и действительными числами).

В качестве примера «вредной» аналогии можно привести перенос известных законов сложения с конечных сумм на бесконечные.

Вот к каким результатам можно прийти, если, в частности, применить эту аналогию при нахождении суммы ряда

S = 1 – 1 + 1 -1 + 1- 1 + … :

a) используя свойство прибавления разности, получим:

S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + … = 0 + 0 + … + 0 + … = 0;

б) используя свойство вычитания разности, получим :

S = 1- (1-1) –(1-1) - … = 1- 0 - 0 - … = 1;

в) используя свойство для алгебраической суммы, имеем : S = 1 - ( 1 – 1 + 1 – 1 + 1 -1 + …), или S= 1 – S, откуда 2S = 1 и S = .

Понятно, что примененная здесь аналогия является незаконной; слишком глубокое качественное различие между конечным и бесконечным в математике уменьшает число аналогичных свойств, присущих тому и другому.

**2**. В процессе обучения математике учителю следует не только самому пользоваться полезными аналогиями, но и приобщать учащихся к самостоятельному проведению умозаключений по аналогии. При этом учащиеся должны понимать, что выводы, полученные по аналогии, требуют обязательного обоснования, так как не исключено то, что они могут оказаться ошибочными. Например, по аналогии с известными признаками делимости на 3 и на 9 можно сформулировать вероятный признак делимости на 27: «Если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27». Однако это утверждение неверно и убедиться в этом можно на каком-нибудь конкретном примере (272745).

Приведем еще один пример.

Учитель спрашивает школьника:

- Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить в 2 раза, а боковую сторону уменьшить также в 2 раза?

- Площадь не изменится.

- Правильно. А если основание прямоугольника увеличит на 20%, а боковую сторону уменьшить на 20%?

- Площадь не изменится.

Последний ответ школьника уже не верен. В самом деле, обозначив основание прямоугольника через *a*, а боковую сторону через *b*, имеем: S = *a* \* *b.*

В соответствии с условием основание измененного прямоугольника *а*1 =  *a* + 0,2*a*

и боковая сторона *b*1 = *b* -0,2*b.* Тогда S1 = *a*1 \* *b*1 = *a* (1-0,2) = *ab* – 0,04*ab*.

Итак, площадь прямоугольника уменьшится на 4%.

Однако следует помнить, что широкое применение аналогии в процессе обучения математике является одним из эффективных приемов, способных пробудить у учащихся живой интерес к предмету, приобщить их к тому виду деятельности, который называют исследовательским. Кроме того, широкое применение аналогии дает возможность более легкого и прочного усвоения школьниками учебного материала, так как часто обеспечивает мысленный перенос определенной системы знаний и умений от известного объекта к неизвестному (что, кстати говоря, способствует также и актуализации знаний).

Поэтому полезны и специально подобранные упражнения в применении метода аналогии, такие, например, как 1) верно ли утверждение: «Если в треугольники все углы конгруэнтны, то и стороны конгруэнтны»? (сформулируйте аналогичное предложение для шестиугольника. Верно ли оно?) или 2) справедливо ли утверждение: «Сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри ( или на стороне) правильного треугольника до его сторон, если величина постоянная»? Сформулируйте аналогичное предложения для какого-либо многоугольника. Проверьте, будет ли оно истинным.

**3**. Не менее полезно воспитывать у школьника привычку сознательно привлекать аналогию при поиске способов решения предложенной им трудной задачи. В этом случае можно рекомендовать им следующий общий план работы над задачей.

1. Подобрать задачу, аналогичную данной, т. е. такую, у которой имелось бы, по сравнению с данной, сходные условия и сходное заключение; вспомогательная задача должна быть проще данной или такой, решение которой известно.

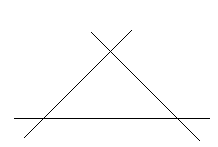
2. Решить вспомогательную задачу; затем провести аналогичные рассуждения при решении данной задачи.

Например, к аналогии к планиметрическим задачам полезно обращаться при решении стереометрических задач.

При этом полезно, чтобы школьник пытался (если это возможно) самостоятельно сформулировать и решить аналогичное планиметрическую задачу. Рассмотрим, например, задачу: «На сколько частей могут разделить пространство четыре произвольно расположенные плоскости?»

Четыре плоскости определяют тетраэдр. Эта фигура напоминает нам 3 пересекающиеся прямые на плоскости.

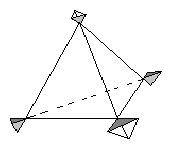
Естественно возникает вспомогательная задача, аналогичная данной: «На сколько частей могут разделить плоскость 3 пересекающиеся прямые?».

Решим сначала вспомогательную задачу (рис. 20). В общем случае 3 прямые могут разделить плоскость на 7 частей, одна из них ограничена( внутренняя область треугольника), а другие неограниченные части плоскости (таких шесть), имеют с внутренней областью общую границу по стороне треугольника или по продолжению его сторон.

Теперь приступаем к решению основной задачи (рис. 21).

В общем случае 4 плоскости могут разделить пространство на следующие части: одна из них ограничена – внутренняя область тетраэдра; неограниченные части пространства имеют общую границу с

Рис.20

внутренней областью по граням тетраэдра (4 части), или по его ребру (6 частей), или по плоскостям, проходящим через его вершины ( еще 4 части).

В этом случае пространство оказывается разделенным всего на 1+4+6+4= 15 частей.

Чтобы школьники могли лучше усвоить этот прием решения задач, целесообразно время от времени предлагать им задачи, при решении которых метод аналогии оказывается полезным. При этом поначалу полезно предлагать учащимся на одну, а две (и более) взаимосвязанных по содержанию задачи, формулирую условия каждой из них одновременно.

Рис. 21

Например:

а) выразите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, через его высоты;

б) выразите радиус шара, вписанного в тетраэдр, через высоты этого тетраэдра.

**4**. Учителю математики полезно знать о тех типичных ошибках, которые порождены неявным применением аналогии. Такие «вредные» (ложные) аналогии часто возникают у школьников стихийно; и сами школьники и учитель не всегда отдают себе отчет в происхождении этих ошибок (а значит, и в возможностях их исправления).

Ограничимся несколькими примерами.

1. Наличие общности в свойства сложения и умножения чисел иногда приводят к возникновению у школьников ошибочной аналогии о сходстве этих и в других свойствах. Так, например, при решении упражнения вида  по ложной аналогии с сокращением на общий множитель учащиеся «сокращают» это выражения на слагаемое 

2. Нередкая ошибка вида  также является результатом ложной аналогии со способом извлечения квадратного корня из произведения . К тому же виду ошибок принадлежит и весьма распространенная ошибка  , порожденная ложной аналогией с верным равенством , где а>0, b>0.

3. Очень распространена ошибка, приводимая психологом Н. А. Менчинской: учащийся при решении примера 96:16=10 допускает ошибку, в основе которой лежит ошибочное умозаключение по аналогии 96:16=10 (?), потому что 90:10=9 и 6:6=1; 9+1=10. В приведенном примере мы имеем перенесение в операцию деления приемов, употребляющихся при сложении и вычитании чисел и делении их на однозначное число [277, c.121].

4. Замечая частые аналогии между многими понятиями и предложениями планиметрии и стереометрии, учащиеся часто переносят их в ситуации, где они оказываются ложными. Этим, пожалуй, объясняются весьма распространенные ошибочные ответы учащихся IX-X классов: «Через данную на прямой точку в пространстве можно провести только один перпендикуляр к этой прямой», или «Две прямые в пространстве, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, всегда параллельны между собой», или «Две плоскости, перпендикулярные к одной и той же третьей плоскости, всегда параллельны между собой» и т. п.

Понятно, что учителю нужно уметь вовремя предостеречь учащихся от ложных аналогий, указывая при этом на происхождение тех или иных допускаемых ошибок.