**Теоремы сложения и умножения вероятностей**

**Теорема сложения вероятностей**

Сформулируем теорему (правило) сложения вероятностей.

**Теорема.** *Вероятность суммы несовместных событий равна* *сумме вероятностей этих событий*

 *Р(А+В+...+К)=Р(А)*+*Р(В)+...+Р(К).* (1)

**Следствие 1.** *Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:*

 *Р(А)* + *Р(В)+...+ Р(К)=*1. (2)

**Следствие 2.** *Сумма вероятностей противоположных событий равна* единице:

 *Р(А)+ Р()* = 1. (3)

**Пример 1.** Вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком до одного года равна 0,13, а при эксплуатации сроком больше 3 лет – 0,36. Найти вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком от 1 года до 3 лет.

**Решение.** Пусть события *А,* *В, С* – выход из строя изделий при эксплуатации сроком соответственно до 1 года, от 1 года до 3 лет, больше 3 лет, причем по условию *Р(А)* = 0,13, *Р(С)* = 0,36. Очевидно, что *С = А + В,* где *А* и *В* – несовместные события. По теореме сложения *Р(С) = Р(А) + Р(В)*, откуда

*Р(В) = Р(С) – Р(А)* = 0,36 – 0,13 = 0,23.

**3амечание.** Следует еще раз подчеркнуть, что рассмотренная ***meорема сложения npuмeнuмa только для несовместных событий***и попытка ее использования для совместных событий приводит к нeвepным и даже абсурдным результатам. Например, пусть вероятность события *Аi* – выигрыша по любому билету денежно-вещевой лотереи, т.е. *Р(Аi)=* 0,05, и приобретено 100 билетов (i = 1,2,...,100). Тогда, применяя теорему сложения, получим, что вероятность выигрыша хотя бы по одному из 100 билетов, т.е.

P*(A1+A2+...+Ai+...+A100)= P(A1)+P(A2)+...+p(Ai)+...+p(A100) =*

= 0,05 + 0,05+. . .+0,05 = 5.

Абсурдность полученного ответа (вероятность любого события не может быть больше 1) объясняется неприменимостью в данном случае теоремы сложения. Т.е. события *A1+A2+...+Ai+...+A100* являются событиями совместными.

**Условная вероятность события.**

**Теорема умножения вероятностей.**

**Независимые события.**

Как отмечено выше, вероятность Р(В), как мера степени объективной возможности наступления события *В*,имеет смысл при выполнении определенного комплекса условий. При изменении условий вероятность события *В* может измениться. Так, если к комплексу условий, при котором изучалась вероятность *Р(В),* добавить новое условие *А,* то *полученная вероятность события В, найденная при условии, что событие А nроизошло, называется* ***условной вероятностью*** *события В* и обозначается *РА(В)* или *Р(В/А).*

**Теорема (правило) умножения вероятностей:** *вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.*

  (4)

Теорема (правило) умножения вероятностей легко обобщается на случай произвольного числа событий:

 *Р(ABC...KL)= Р(А)* *РА(В)* *РАВ(C)…,PАВС…К(L),* (5)

***Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других; при этом условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли****.*

**Пример 2.** В ящике 5 деталей, среди которых 3 стандартные и 2 бракованные. Поочередно из него извлекается по одной детали (с возвратом и без возврата). Найти вероятность извлечения во второй раз стандартной детали.

**Решение.** Пусть события *А* и *В* - извлечение стандартной детали соответственно в 1-й и 2-й раз. Очевидно, что *Р(А)*=3/5. Если вынутая деталь вновь возвращается в ящик, то вероятность извлечения стандартной детали во второй раз *Р(В)*=3/5. Если вынутая деталь в ящик не возвращается, то вероятность извлечения стандартной детали во второй раз *Р(В)* зависит от того, какая деталь была извлечена в первый раз стандартная (событие *А)* или бракованная (событие *).* В первом случае *РA(В)* =2/4, во втором случае =3/4 так как из оставшихся четырех деталей стандартных будет соответственно 2 или 3.

**Пример 3.** Из 20 вопросов программы студент выучил 16. Требуется найти вероятность того, что на 3 предложенных вопроса студент знает ответ.

**Решение.** А – «на 3 предложенных вопроса студент знает ответ».

*Аi –* « *i* – ый вопрос оказался знакомым» (*i* = 1,2,3). Тогда *А* = *А1 А2 А3.* Можно представить, что вопросы записаны на отдельных карточках и выбираются наугад один за другим (без возвращения). Тогда ,  (вероятность получения второго знакомого вопроса при условии, что первый оказался выученным),  (вероятность третьего «везения» при условии, что выученными оказались оба первых вопроса). Тогда, используя теорему умножения, получим

 .

**Пример 4.** Работа электронного устройства прекратилась вследствие выхода из строя одного из пяти унифицированных блоков. Производится последовательная замена каждого блока новым до тех пор, пока устройство не начнет работать. Какова вероятность того, что придется заменить: а) 2 блока; б) 4 блока?

**Решение.** а) *А* – «замена двух блоков».

 *Аi –* « *i* – ый блок исправен» (*i* = 1, 2, 3, 4, 5).

Очевидно, что придется заменить 2 блока, если 1-й блок исправен, а 2-й – неисправен, т.е. . Теперь по теореме умножения

.

б) Пусть событие *В* – замена 4 блоков. Очевидно, что

 и по теореме умножения

.

Теорема умножения принимает более простой вид, когда события, образующие произведение, ***независимы***.

*Зависимость и независимость событий всегда взаимны.* Поэтому можно дать следующее определение независимости событий.

Два события называются ***независимыми****,* если появление одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Для независимых событий теорема (правило) умножения вероятностей для двух и нескольких событий примет вид :

 *Р(АВ)* = *Р(А)Р(В),* (6)

 *Р(АВС...КL) = Р(А)P(B)...P(L),* (7)

т.е. ***вероятность произведенuя двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий****.*.

**Пример 5.** Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишени 3 пробоины?

**Решение.** Обозначим события:

*Аi,* – попадание в цель *i-гo* стрелка *(i=1,2,3);*

*В* – в мишени три пробоины.

Очевидно, что *В* = *А1 А2 А3,* причем события *A1,* *А2, А3* – независимы. По теореме умножения для независимых событий

*Р(В)=Р(А1А2Аз)= Р(А1)Р(А2)Р(Аз)*=0,8 0,7 0,9 = 0,504.

**Пример 6.** Урна содержит 16 белых и 4 черных шара. Требуется найти вероятность того, что 3 последовательно извлеченных шара окажутся белыми, если после каждого извлечения шар возвращается в урну, и все шары снова перемешиваются.

**Решение.** Пусть событие *А* – «извлеченные шары окажутся белыми», *Аi* – «*i-й* шар оказался белым» *(i=1,2,3).*

События *A1,* *А2, А3*  назависимы. По теореме умножения для независимых событий

.

При решении ряда задач требуется найти вероятность суммы двух или нескольких событий, т.е. вероятность появления хотя бы одного из этих событий. В этом случае теорему сложения вероятностей для независимых событий применять нельзя.

**Теорема.** *Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т.е.*

 *Р(А+В) = Р(А)+Р(В) - Р(АВ).* (8)

**Пример 7.** Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания (событие *А*) для первого стрелка 0,7, вероятность попадания (событие *В*) для второго стрелка 0,8. Считая попадания независимыми событиями, найти вероятность поражения мишени хотя бы одним стрелком (т.е. вероятность события *А + В*).

**Решение.** События *А* и *В* совместны, поэтому следует пользоваться формулой 8:

*Р(А+В) = Р(А)+Р(В) - Р(АВ)* = *Р(А)+Р(В) - Р(А)Р(В)=*

= 0,7 + 0,8 –0,7·0,8= 0,94.

**Пример 7.** На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

**Решение.** Пусть событие *Аi* – выигрыш по *i*-му билету ( *i=1,* 2, 3, 4).

 а) Вероятность выигрыша хотя бы по одному из двух билетов равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

*Р(А1* + *А2)* = *P(A1)* + *Р(А2) - P(A1A2) =Р(А1) + Р(А2) - Р(А1) Р(А2)* ***=***

б) Вероятность выигрыша хотя бы по одному из четырех билетов равна

**